УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
ИВАНОВА А.А.

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ЦЕЛИ В МЕТОДЕ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Задача принятия решений на основе метода анализа иерархий обобщается для случая, позволяющего не только находить аппроксимации неизвестных значений глобальной цели на заданном множестве альтернатив, но и сводить построение аппроксимирующей функции, которая является формализацией глобальной цели, к задаче линейного программирования.

Decision making problem on the base of the Analytical Hierarchy Process is generalized for the case permitting to find approximations of unknown values of global goal on the assigned set of alternatives. It also permits to reduce tracing of approximation function which is the formalization of global goal, to the linear programming problem.

Введение

Метод анализа иерархий (МАИ) Саати [1-4] является наиболее применимым методом нахождения наилучшей альтернативы из конечного множества альтернатив в случае, когда глобальная цель не формализована. Фактически МАИ находит аппроксимацию значений не формализованной глобальной цели на заданном множестве альтернатив.

В [5] была сформулирована следующая задача.

1) Имеется множество альтернатив $A_{s_1},\dots A_{s_p}$ из множества заданных альтернатив $A_1,\dots A_m$, для которых с помощью МАИ построены оценки $f\left(A_{s_j}\right)=f\left(\overline{x}^{s_j}\right),\ j=\overline{1,p},$ где n – мерный вектор $\overline{x}^{s_j}$ представляет альтернативу A_{s_j}, $f\left(\overline{x}\right)$ – неизвестная числовая скалярная функция векторного аргумента $\overline{x}$, формализующая глобальную цель, (формулировка которой в общем случае носит качественный характер).

2) Имеется множество парных предпочтений $G\left(A_i \text{ не хуже } A_j\right),\ (i,j)\in I,\ i,j\in\left\{\overline{1,m}\right\}$.

Каждую пару эксперт (эксперты) задают тогда, когда он уверен, что с точки зрения глобальной цели альтернатива A_i не хуже альтернативы A_j. Очевидно, что парные предпочтения не должны нарушать условия транзитивности, иначе $f\left(\overline{x}\right)$ не существует. Необходимо по этим данным построить наилучшую (по введенному и обоснованному критерию) аппроксимирующую функцию $f\left(\overline{x}\right)$, формализующую глобальную цель.

Для упрощения процесса формализации задачи будем считать, что для любой пары индексов $(i,j)\in I$ выполняется $i,j\in\left\{s_1,s_2,\dots,s_p\right\}$

Постановка задачи

В данной статье рассмотрена наиболее простая постановка сформулированной выше задачи, решение которой естественным образом используется в более общем случае.

Пусть имеют место следующие посылки, основанные на экспертном анализе структуры искомой аппроксимирующей функции $f\left(\overline{x}\right)$:

1. $f\left(\overline{x}\right)$ является взвешенной суммой известных составляющих, каждая из которых выражает вклад вектора $\overline{x}$, либо множества компонент (с учетом их взаимного влияния) в глобальную цель.

Веса каждой из составляющих являются неизвестными. Таким образом, построение функции $f\left(\overline{x}\right)$ сводится к нахождению весовых коэффициентов.

2. Известные компоненты принадлежат одному из следующих классов:

1) $\sum\limits_{\forall(i_1\dots i_k)\in K_0} a_{i_1\dots i_k}\cdot 1\left(x_{i_1}\cdot x_{i_2}\dots x_{i_k}\right)$

$$1\left(x_{i_1}\cdot x_{i_2}\dots x_{i_k}\right)=\begin{cases}1, \forall x_{i_j}>0, & j=\overline{1,k}\\ 0, & \exists x_{ij}=0\end{cases}.$$

Первая компонента отражает постоянный вклад в глобальную цель, который определяется фактором неравенства одновременно нулю определенных совокупностей компонент вектора $\overline{x}$.

2) $$\sum_{\forall(i_1 i_2 \dots i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1 j_2 \dots j_k)\in K_1(i_1 i_2 \dots i_k)} \pm\, b_{i_1\ i_2\ \dots\ i_k}^{p_{i_1}^{j_1} p_{i_2}^{j_2} \dots p_{i_k}^{j_k}} \left(x_{i_1}\right)^{p_{i_1}^{j_1}} \left(x_{i_2}\right)^{p_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{i_k}\right)^{p_{i_k}^{j_k}}$$

$\forall b_{i_1 i_2\ \dots i_k}^{p_{i_1}^{j_1} \dots p_{i_k}^{j_k}} \ge 0 \quad i_l,\, j_l,\ \ l=\overline{1,n}\ \in \left\{\overline{1,n}\right\}$,

$p_{i_l}^{j_l}$, $\ l=\overline{1,k}\le n$ – натуральные числа, $\pm$ перед каждым членом суммы обозначает, что эксперт точно знает знак соответствующей взвешенной составляющей.

3) $$\sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1 \dots j_k)\in K_2(i_1, \dots i_k)} c_{i_1\ \dots\ i_k}^{t_{i_1}^{j_1} t_{i_2}^{j_2} \dots t_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}\right)^{t_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}\right)^{t_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{i_k}\right)^{t_{i_k}^{j_k}}$$

$c_{i_1\ \dots\ i_k}^{t_{i_1}^{j_1} t_{i_2}^{j_2} \dots t_{i_k}^{j_k}}$ – неизвестные коэффициенты,

$t_{i_l}^{j_l}$, $\ l=\overline{1,k}\le n$ – натуральные числа.

Будем рассматривать случай, когда эксперты способны дать заключение, что с точностью до неизвестных численных значений коэффициентов $a_{i_1 \dots i_k}$; $b_{i_1\ \dots\ i_k}^{p_{i_1}^{j_1} \dots p_{i_k}^{j_k}}$; $c_{i_1\ \dots\ i_k}^{t_{i_1}^{j_1} \dots t_{i_k}^{j_k}}$ функция $f\left(\overline{x}\right)$ имеет вид:

$$f\left(\overline{x}\right) = \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_0} a_{i_1 \dots i_k} \cdot 1\left(x_{i_1} \dots x_{i_k}\right) + \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1 \dots j_k)\in K_1(i_1 \dots i_k)} \pm b_{i_1\ \dots\ i_k}^{p_{i_1}^{j_1} \dots p_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}\right)^{p_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}\right)^{p_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{ik}\right)^{p_{i_k}^{j_k}} +$$
$$+ \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1 \dots j_k)\in K_2(i_1 \dots i_k)} c_{i_1\ \dots\ i_k}^{t_{i_1}^{j_1} \dots t_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}\right)^{t_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}\right)^{t_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{ik}\right)^{t_{i_k}^{j_k}}$$

При этом эксперты не гарантируют, что все весовые коэффициенты не равны нулю. Необходимо найти истинную структуру функции $f\left(\overline{x}\right)$ и значения неизвестных коэффициентов, соответствующих этой структуре.

Решение поставленной задачи

Оценка неизвестных коэффициентов проводится по одной из следующих задач линейного программирования:

$$\min y$$
$$-y \le f\left(\overline{x}^{s_l}\right) - \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_0} a_{i_1 \dots i_k} \cdot 1\left(x_{i_1}^{s_l} \dots x_{i_k}^{s_l}\right) + \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1 \dots j_k)\in K_1(i_1 \dots i_k)} \pm b_{i_1\ \dots\ i_k}^{p_{i_1}^{j_1} \dots p_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}^{s_l}\right)^{p_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{s_l}\right)^{p_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{i_k}^{s_l}\right)^{p_{i_k}^{j_k}} +$$
$$+ \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1 \dots j_k)\in K_2(i_1 \dots i_k)} c_{i_1\ \dots\ i_k}^{t_{i_1}^{j_1} \dots t_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}^{s_l}\right)^{t_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{s_l}\right)^{t_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{i_k}^{s_l}\right)^{t_{i_k}^{j_k}} \le y \qquad y \ge 0, \quad l=\overline{1,p};$$

$$\sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_0} a_{i_1 \dots i_k} \cdot 1\left(x_{i_1}^{i} \dots x_{i_k}^{i}\right) + \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1 \dots j_k)\in K_1(i_1 \dots i_k)} \pm b_{i_1\ \dots\ i_k}^{p_{i_1}^{j_1} \dots p_{i_k}^{j_k}} \left(x_{i_1}^{i}\right)^{p_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{i}\right)^{p_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{i_k}^{i}\right)^{p_{i_k}^{j_k}} +$$
$$+ \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1 \dots j_k)\in K_2(i_1 \dots i_k)} c_{i_1\ \dots\ i_k}^{t_{i_1}^{j_1} \dots t_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}^{i}\right)^{t_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{i}\right)^{t_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{i_k}^{i}\right)^{t_{i_k}^{j_k}} \ge \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_0} a_{i_1 \dots i_k} \cdot 1\left(x_{i_1}^{j} \dots x_{i_k}^{j}\right) +$$
$$+ \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1 \dots j_k)\in K_1(i_1 \dots i_k)} \pm b_{i_1\ \dots\ i_k}^{p_{i_1}^{j_1} \dots p_{i_k}^{j_k}} \left(x_{i_1}^{j}\right)^{p_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{j}\right)^{p_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{i_k}^{j}\right)^{p_{i_k}^{j_k}} +$$
$$+ \sum_{\forall(i_1 \dots i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1 \dots j_k)\in K_2(i_1 \dots i_k)} c_{i_1\ \dots\ i_k}^{t_{i_1}^{j_1} \dots t_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}^{j}\right)^{t_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{j}\right)^{t_{i_2}^{j_2}} \dots \left(x_{i_k}^{j}\right)^{t_{i_k}^{j_k}}$$
$$\forall\left(i,\, j\right)\in I$$

Переменными задачи линейного программирования являются: y; $a_{i_1 \dots i_k}$; $b_{i_1\ \dots\ i_k}^{p_{i_1}^{j_1} \dots p_{i_k}^{j_k}}$; $c_{i_1\ \dots\ i_k}^{t_{i_1}^{j_1} \dots t_{i_k}^{j_k}}$.

$$\min \sum_{l=1}^{p} y_l$$

$$-y_l \le f\left(\overline{x}^{s_l}\right) - \sum_{\forall(i_1...i_k)\in K_0} a_{i_1...i_k}\cdot 1\left(x_{i_1}^{s_l}...x_{i_k}^{s_l}\right) + \sum_{\forall(i_1...i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1...j_k)\in K_1(i_1...i_k)} \pm b_{i_1\,...\,i_k}^{p_{i_1}^{j_1}...p_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}^{s_l}\right)^{p_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{s_l}\right)^{p_{i_2}^{j_2}} ...\left(x_{i_k}^{s_l}\right)^{p_{i_k}^{j_k}} +$$

$$+ \sum_{\forall(i_1...i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1...j_k)\in K_2(i_1...i_k)} c_{i_1\,...\,i_k}^{t_{i_1}^{j_1}...t_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}^{s_l}\right)^{t_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{s_l}\right)^{t_{i_2}^{j_2}} ...\left(x_{i_k}^{s_l}\right)^{t_{i_k}^{j_k}} \le y_l \quad y_l \ge 0, \quad l=\overline{1,p};$$

$$\sum_{\forall(i_1...i_k)\in K_0} a_{i_1...i_k}\cdot 1\left(x_{i_1}^{i}...x_{i_k}^{i}\right) + \sum_{\forall(i_1...i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1...j_k)\in K_1(i_1...i_k)} \pm b_{i_1\,...\,i_k}^{p_{i_1}^{j_1}...p_{i_k}^{j_k}} \left(x_{i_1}^{i}\right)^{p_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{i}\right)^{p_{i_2}^{j_2}} ...\left(x_{i_k}^{i}\right)^{p_{i_k}^{j_k}} +$$

$$+ \sum_{\forall(i_1...i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1...j_k)\in K_2(i_1...i_k)} c_{i_1\,...\,i_k}^{t_{i_1}^{j_1}...t_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}^{i}\right)^{t_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{i}\right)^{t_{i_2}^{j_2}} ...\left(x_{i_k}^{i}\right)^{t_{i_k}^{j_k}} \ge \sum_{\forall(i_1...i_k)\in K_0} a_{i_1...i_k}\cdot 1\left(x_{i_1}^{j}...x_{i_k}^{j}\right) +$$

$$+ \sum_{\forall(i_1...i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1...j_k)\in K_1(i_1...i_k)} \pm b_{i_1\,...\,i_k}^{p_{i_1}^{j_1}...p_{i_k}^{j_k}} \left(x_{i_1}^{j}\right)^{p_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{j}\right)^{p_{i_2}^{j_2}} ...\left(x_{i_k}^{j}\right)^{p_{i_k}^{j_k}} +$$

$$+ \sum_{\forall(i_1...i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1...j_k)\in K_2(i_1...i_k)} c_{i_1\,...\,i_k}^{t_{i_1}^{j_1}...t_{i_k}^{j_k}} \cdot \left(x_{i_1}^{j}\right)^{t_{i_1}^{j_1}} \cdot \left(x_{i_2}^{j}\right)^{t_{i_2}^{j_2}} ...\left(x_{i_k}^{j}\right)^{t_{i_k}^{j_k}}$$

$$\forall(i,j)\in I$$

Переменными задачи линейного программирования являются:

$$y_l;\ a_{i_1...i_k};\ b_{i_1\,...\,i_k}^{p_{i_1}^{j_1}...p_{i_k}^{j_k}};\ c_{i_1\,...\,i_k}^{t_{i_1}^{j_1}...t_{i_k}^{j_k}}.$$

При анализе альтернатив $A_j \quad j=\overline{1,m}$, задаваемых вектором $\overline{x}$, $x=\left(x_1...x_n\right)^{\mathrm{T}}$, может оказаться, что более естественным является построение функции глобальной цели $f\left(\overline{x}\right)$ как функции вида $f\left(A\overline{x}\right)$, где A – прямоугольная матрица размером $\left(l\times n\right) \quad l\le n$, где вектор $\overline{y}=A\overline{x}$ это вектор агрегированных характеристик альтернативы (проекта), которые более естественно, чем компоненты вектора $\overline{x}$ могут быть использованы для формализации неизвестной функции глобальной цели. В этом случае формально ранее приведенные модели остаются неизменными с учетом замены в них векторов $\overline{x}^{s_l}$, $\overline{x}^{i}$, $\overline{x}^{j}$ на вектора $\overline{y}^{s_l}=A\overline{x}^{s_l}$, $\overline{y}^{i}=A\overline{x}^{i}$, $\overline{y}^{j}=A\overline{x}^{j}$.

В этом случае эксперты строят множества K_0, K_1, $K_1\left(y_{i_1}...y_{i_k}\right)$, K_2, $K_2\left(y_{i_1}...y_{i_k}\right)$, анализируя влияние на функцию вектора $\overline{y}=A\overline{x}$.

Выводы

В данной статье формализация качественно заданной функции цели с использованием метода иерархий Саати сводится к задаче линейного программирования. Формализация качественно заданной функции цели позволяет автоматизировать процесс выбора наилучшей альтернативы из произвольного набора альтернатив без привлечения экспертов, т.е. без дополнительных временных и финансовых затрат.

Список литературы

1. Saaty T.L. Multicriteria Decision Making. The Analytic Hierarchy Process,. – New York: McGraw Hill International, 1990.– p.437.
2. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе: Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1991. – 223 с.
3. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Tomas Saaty. The Analytic Hierarchy Process. –Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. – М.: Радио и связь, 1993. – 315 с.
4. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. – Киев: Наукова думка. – 2002. – 381 с.
5. Павлов А.А., Иванова А.А., Зигура Р.А. Метод группового учёта аргументов и анализа иерархий (МГУАИАИ) в задачах принятия решений. Вісник НТУУ „КПІ” Інформатика, управління та обчислювальна техніка, Київ 2008р. №47. –350 с. – С.205-214.