УДК 004.3

БЛІНОВА Т. О.

ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ В КОДАХ ЗОЛОТОЇ ПРОПОРЦІЇ В ПОРОЗРЯДНОМУ РЕЖИМІ, ПОЧИНАЮЧИ ЗІ СТАРШИХ РОЗРЯДІВ

Автором пропонується нестандартна мінімізована форма (MN-форма) представлення чисел у коді класичної золотої пропорції. У цій формі може бути представлене будь-яке дійсне число, причому в коді будуть відсутні послідовності цифр "111". Використання MN-форми дозволяє здійснювати та контролювати порозрядні обчислення, виконуючи арифметичні операції в MSDF-режимі (починаючи зі старшого розряду). Розроблено алгоритми виконання деяких арифметичних операцій, зокрема, алгебраїчного додавання та множення, для чисел, представлених у MN-формі.

Author proposes to write the golden ratio base numbers in the nonstandard minimized form (MN-form). Any real number can be presented in this form avoiding the digit sequence "111”. The MN-form use allows to carry out and control on-line computations, executing arithmetic operations in the Most Significant Digit First (MSDF)-mode. The algorithms of execution of some arithmetic operations, including the addition, subtraction and multiplication, are developed for MN-form numbers.

Проблеми побудови відмовостійких та контролездатних обчислювальних засобів є завжди важливими. У [1] показана ефективність використання системи АЦП – оптичний канал – ЦАП, яка працює цілком у класичному коді Фібоначчі або золотої пропорції, у середовищах із великими індустріальними перешкодами. Система містить АЦП та ЦАП, що самокоректуються, і цифровий оптичний канал, який нечутливий до електромагнітних перешкод, правильність передачі інформації по котрому може контролюватися за рахунок надмірності кодів.

При обробці інформації, яка передається такою системою, доцільно використовувати операційні пристрої, котрі працюють у коді класичної золотої пропорції (коді золотої 1-пропорції), щоб уникнути зайвих операцій по перекодуванню сигналів у(з) двійковий код та використати додаткові можливості по контролю інформації. Отже, завданням таких пристроїв буде обробка інформації, що порозрядно надходить, напрклад, з оптичного каналу та представлена в коді золотої 1-пропорції у вигляді мінімізованої форми (МН-форми), код якої може містити послідовності не більш ніж із двох одиниць [1].

Питанням виконання арифметичних операцій у коді золотої пропорції (золотого перетину) присвячені роботи, наведені в [2], зокрема, це роботи [3-6]. Виконанню операцій у порозрядному, починаючи з найбільш значущих, режимі (MSDF-режимі), присвячена робота [7]; пристрої, що виконують у MSDF-режимі обчислення в класичному коді Фібоначчі або золотої пропорції були створені автором статті, зокрема, це роботи [8-11].

Метою даної статті є опис розроблених автором алгоритмів виконання операцій алгебраїчного додавання та множення над числами, що поступають порозрядно, починаючи зі старших розрядів, і представлені в коді золотої 1-пропорції у вигляді мінімізованої форми.

Операції, що здійснюються в MSDF-режимі над числами, представленими в МН-формі, можна розділити на дві групи. До першої належатимуть базові операції, а саме: неповна згортка, розгортка, порівняння, перевід чисел із прямого коду в доповняльний, зсув та підсумовування. До другої групи – усі інші арифметичні операції: алгебраїчне додавання, множення, ділення тощо. Виконання операцій із другої групи зводяться до здійснення операцій із першої групи. Так, наприклад, виконання операції множення зводиться до послідовного здійснення операцій підсумовування, причому воно супроводжується виконанням операції неповної згортки над сумами часткових добутків. Чергове підсумовування починається після отримання перших цифр чергового проміжного результату, без очікування закінчення попередніх перетворень. Контрольні операції виконуються на кожному ітераційному кроці паралельно з обчислювальними операціями.

При обробці МН-форм на кожному кроці формується, як правило, один розряд результату, значення котрого на наступних ітераційних кроках обчислень не змінюється. Отже,

кількість виконуваних обчислень не змінюється, вона залежить від розрядності результату.

Операція неповної згортки використовується для приведення кодових слів до МН-форми представлення. Вона полягає у виконання всіх можливих згорток при виконанні одного перегляду коду числа, починаючи зі старших розрядів.

Коди золотої 1-пропорції допускають представлення чисел як у формі з фіксованою точкою, так й у формі з плаваючою точкою. Далі будемо детальніше розглядати операції над числами з фіксованою точкою ($|D|<1$):

$$D = \sum_{i=1}^{m} d_i a_1^{-i}, |D| = \sum_{i=1}^{m} d_i a_1^{-i},$$

де $d_i=\{0,1\}$ – i-й розряд кодового слова;
$\alpha_1 = (1+\sqrt{5})/2$ – основа системи числення.

Для представлення від'ємних чисел використовується доповнення числа D до α_1^2, що сприяє розробці простих алгоритмів обчислень у MSDF-режимі і дозволяє всі розряди (зі знаковими включно) обробляти за однаковими правилами. Формування доповняльного коду від'ємного числа зводиться до інвертування розрядів кодового слова; запису одиниць у розряди з вагою $\alpha_1^{-(m+1)}$ та $\alpha_1^{-(m+2)}$; виконанню неповної згортки; запису одиниці у розряд із вагою $\alpha_1^{-(m+1)}$ та виконанню неповної згортки. При цьому формуються два знакових розряди: 00 для кодування знака "+" та 10 для "–" [12].

Розряди кінцевого результату $Y = \sum_{i=-1}^{m+1} y_i a_1^{-i}$, формуються, починаючи із третього ітераційного кроку (при i=1). Зміна знака числа при перетворенні числа із прямого в доповняльний код або з доповняльного в прямий код свідчить про переповнення розрядної сітки. На кожному кроці перевіряється правильність виконання операції – якщо неповну згортку поточних розрядів неможливо провести (тобто в розряді, у який потрібно записати одиницю, вона вже є), реєструється помилка типу переходу 0 в 1.

Виконання зсуву на один розряд доповняльного коду від'ємного числа наліво або направо (тобто множення числа на α_1 або α_1^{-1}) виконується наступним чином: виконується зсув кодового слова праворуч (ліворуч) на один розряд ; до отриманого кодового слова приписується ліворуч (праворуч) 0; підсумувати 1 до розряду з вагою α_1^0.

Приклад зсуву на один розряд ліворуч доповняльного коду (10.1000001011) числа (–0.0010011000):

```
      зсув 01.0000010110;
        +   1.          ;
результат 10.0100010110.
```

Зазначимо, що в коді золотої 1-пропорції при підсумовуванні двох одиниць із вагою α_1^{-i} утворюються перенесення e_{i-1} та e_{i+2} у розряди з вагами $\alpha_1^{-(i-1)}$ та $\alpha_1^{-(m+2)}$ відповідно. Отже, при виконанні підсумовування двох операндів, представлених у МН-формі, необхідно враховувати чотири змінні.

При виконанні операції алгебраїчного додавання виконується операція підсумовування доповняльних кодів операндів, причому над усіма розрядами, включаючи знакові, здійснюються однакові перетворення. Перенесення у розряд із вагою α_1^{+2} не береться до уваги. Операція завершується виконанням неповної згортки.

Нехай виконується алгебраїчне додавання двох чисел – A та O. Позначимо розряди перенесення як e, проміжних сум як u, і результату як y. Тоді алгоритм цієї операції можна записати наступним чином.

1: $e_{-1} = e_0=0$;
$u_{-2}^{-2} = u_{-3}^{-2}= u_{-4}^{`} = u_{-5}^{``}=0$;
$i = -1$;
2: $e_{i+2} = E(a_i,o_i,e_i,u_{i-1}^{i-1})=o_ie_i\bar{u}_{i-1}^{i-1} \vee a_ie_i\bar{u}_{i-1}^{i-1} \vee a_io_i\bar{u}_{i-1}^{i-1} \vee a_io_ie_i$;
$u_i^i = U_0(a_i,o_i,e_i,u_{i-1}^{i-1})= \bar{a}_i\bar{o}_ie_i\bar{u}_{i-1}^{i-1} \vee a_i\bar{o}_i\bar{e}_i\bar{u}_{i-1}^{i-1} \vee \bar{a}_io_i\bar{e}_i\bar{u}_{i-1}^{i-1} \vee \bar{a}_io_i\bar{e}_iu_{i-1}^{i-1} \vee$
$\vee a_i\bar{o}_ie_iu_{i-1}^{i-1} \vee a_io_i\bar{e}_iu_{i-1}^{i-1}$;
$u_{i-1}^i = U_1(a_i,o_i,e_i,u_{i-1}^{i-1})=\bar{a}_io_ie_i\bar{u}_{i-1}^{i-1} \vee a_i\bar{o}_ie_i\bar{u}_{i-1}^{i-1} \vee a_io_i\bar{e}_i\bar{u}_{i-1}^{i-1} \vee a_io_ie_iu_{i-1}^{i-1}$;
$u_{i-2}^i = U_2(a_i,o_i,e_i,u_{i-1}^{i-1}, u_{i-2}^{i-1})=u_{i-2}^{i-1} \vee a_io_ie \vee \bar{a}_ie_iu_{i-1}^{i-1} \vee a_i\bar{o}_iu_{i-1}^{i-1} \vee o_ie_iu_{i-1}^{i-1}$;
3: $u_{i-2}^{`} = u_{i-2}\bar{u}_{i-3}^{`}$;
$u_{i-3}^{``} = \bar{u}_{i-2}^{`} u_{i-3}^{`}$;
$y_{i-4} = u_{i-4}^{``} \vee u_{i-2}\bar{u}_{i-3}^{`}$;
4: Якщо $i < m+4$, тоді $i = i+1$ і на 2;
5: Кінець.

Кінцеві значення розрядів результату починають формуватися при i = 3 (із затримкою у чотири ітераційних кроки). Для контролю правильності виконання операції на кожному кроці перевіряється, чи не виникли заборонені ситуації: $a_io_ie_iu_{i-2}^{i-1}=1$ або $u_{i-1}^{i-1}u_{i-2}^{i-1}=1$. При складанні чисел з однаковими знаками може

виникнути переповнення, ознакою чого є розбіжність знаків операндів і результату.

При виконанні операції множення кодів золотої 1-пропорції формування часткових добутків виконується за правилами, прийнятими в класичній двійковій системі числення. Для прискорення можна використовувати, наприклад, множення на два розряди множника, використовуючи можливість заміни групи розрядів 011 на групу 100.

Нехай виконується прискорене за вищезгаданим способом множення двох чисел – A та O. Позначимо розряди перенесення як e, проміжних сум як u, і результату як y. Тоді алгоритм цієї операції має наступний вигляд.

1: $i = k=1$;

2: $d_{i,k} = a_{i-2k+1}o_{2k-1}\, o_{2k} \vee a_{i-2k}o_{2k-1}\, \bar{o}_{2k} \vee a_{i-2k-1}\bar{o}_{2k-1}\, o_{2k}$;

$e_{i+2k} = E(y_{i,k-1},d_{i,k},e_{i,k},u_{i-1,k}^{\,i-1})$;

$u_i^{\,i} = U_0(y_{i,k-1},d_{i,k},e_{i,k},u_{i-1,k}^{\,i-1})$;

$u^{\,i}_{i-1} = U_1(y_{i,k-1},d_{i,k},e_{i,k},u_{i-1,k}^{\,i-1})$;

$u^{\,i}_{i-2} = U_2(y_{i,k-1},d_{i,k},e_{i,k},u_{i-1,k}^{\,i-1}, u_{i-2,k}^{\,i-1})$;

3: $u`_{i-2,k} = u_{i-2,k}\bar{u}`_{i-3,k-1}$;

$u``_{i-3,k} = \bar{u}`_{i-2,k}\, u`_{i-3,k-1}$;

$y_{i-4,k} = u``_{i-4,k-1} \vee u_{i-2,k-1}\bar{u}`_{i-3,k}$;

4: Якщо $i–2k < m+7$, тоді $i = i+1$ і на 2;

5: Якщо $k < m/2$, тоді $k = k+1$ і на 2;

6: Кінець.

При множенні чисел, представлених у прямому коді, знакові розряди обробляються окремо.

У загальному випадку добуток $[A]_\partial \times [O]_\partial$, отриманий при множенні доповняльних кодів $[A]_\partial$ та $[O]_\partial$ чисел A та O не дорівнює $[A\times O]_\partial$ і потребує корекції, якщо хоча б один із множників від'ємний.

Нехай $A<0$, $O<0$, тоді $[A]_\partial[O]_\partial=\alpha_1^4 - \alpha_1^2\,(|A| + |O|) + [A\times O]_\partial$. Отже для корекції необхідно до псевдодобутку додати зсунуті на два розряди ліворуч модулі обох операндів та відкинути два старших розряди (із вагами α_1^4 та α_1^3) отриманої суми.

Нехай $A>0$, $O<0$, тоді $[A]_\partial[O]_\partial= \alpha_1^2|A| - \alpha_1^2 + [A\times O]_\partial$. Отже для корекції необхідно до псевдодобутку додати зсунутий на два розряди ліворуч доповняльний код $[–|A|]_\partial$ та відкинути два старших розряди (із вагами α_1^4 та α_1^3) отриманої суми.

Приклад виконання корекції при множенні чисел A = ±0,1010 та O = ±0,1000 (для порівняння наводимо результати $[|A| \times |O|]_\partial$ = 00,01010000,

$[–|A|\times|O|]_\partial$=10,01001000):

($[–|A|]_\partial \times [|O|]_\partial$ = 10.0001× 00,1000 = 0001,00001000)

+ ($\alpha_1^2[–|O|]_\partial$ = 1001,00000000)

= 1010,01001000,

отже результат $[–|A|\times|O|]_\partial$= 10,01001000;

($[–|A|]_\partial \times [–|O|]_\partial$ = 10.0001× 10,0100 = 0100,10100100)

+ (α_1^2 ($|A|$ + $|O|$) = 0010,10+0010,00 = 0101,00100000)

= 1100,01010000,

отже результат $[|A|\times|O|]_\partial$= 00,01010000.

Таким чином, на прикладі деяких арифметичних операцій, зокрема, алгебраїчного додавання та множення, показано, як, використовуючи MN-форму представлення чисел у класичній золотій пропорції, можна здійснювати та контролювати порозрядні обчислення в MSDF-режимі.

Перелік посилань

1. Блінова Т.О. Використання кодів Фібоначчі та золотої пропорції в цифрових оптичних каналах передачі інформації //Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Інформатика, управління та обчислювальна техніка. № 47. – 2007. С.255-261.
2. Институт золотого сечения. http://www.trinitas.ru/
3. Стахов А.П., Лужецкий В.А. Машинная арифметика ЦВМ в кодах Фибоначчи и золотой пропорции.– М.: Научный совет АН СССР по комплексной проблеме "Кибернетика", 1981. – 64 с.
4. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. –151с.
5. Stakhov A.P. Computer Arithmetic based on Fibonacci Numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations", Toronto, "SKILLSET-Training", 1997.
6. Компьютеры Фибоначчи и новая теория кодирования: история, теория, перспективы. Электронный журнал Таганрогского радиотехнического университета "Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы", № 2 (18), 2004. http://pitis.tsure.ru/files18/p5.pdf.
7. Ch. Frougny. On-line digit set conversion in real base. Theoret. Comp. Sci. – 2003, pp. 221-235. http://citeseer.ist.psu.edu/frougny00line.html.

8. Авт. св. СССР N 1137460 А, кл. G06F7/49, БИ 4, 1985. Конвейерный сумматор/ Луцкий Г.М., Блинова Т.А., Корочкин А.В.
9. Авт. св. СССР N 1254470 А1, кл. G06F7/49. БИ 32, 1986. Конвейерное операционное устройство/ Луцкий Г.М., Блинова Т.А., Дрофа С.В.
10. Авт. св. СССР N 1693601 А1, кл. G06F7/49. БИ. 47, 1991. Конвейерное вычислительное устройство/Блинова Т.А.
11. Авт. св. СССР N 1725401 А2, кл. Н03М13/12. БИ. 13, 1992. Устройство для преобразования кода /Луцкий Г.М., Блинова Т.А., Дрофа С.В., Порев В.Н.
12. Блинова Т.А. Представление отрицательных чисел в кодах золотой пропорции //Вестник КПИ. Сер. автоматика и электроприборостроение. – N24. – 1987. – С. 125-127.