

## НЕКОТОРЫЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ В *GL*-МОДЕЛЯХ

Работа посвящена определению некоторых граничных оценок, в частности, числа попарных рёберных циклов (ПРЦ), которые могут возникнуть при преобразованиях графо-логических моделей, отражающих реакцию отказоустойчивых многопроцессорных систем на появление отказов.

The work is dedicated for determination of some boundary estimation in particularly the numbers of pair edge cycles which may appear during transformation of graph-logical models reflecting the reaction of fault tolerant multiprocessor systems under appearance of faults.

### 1. Введение

Многопроцессорные системы с каждым годом находят все более широкое применение. В настоящей работе рассматриваются отказоустойчивые многопроцессорные системы (ОМС), создаваемые для повышения надёжности управления какими-либо ответственными объектами или процессами. Расчет надёжности, как одного из важнейших параметров таких систем, представляет собой определенные трудности именно для ОМС, и для решения этой задачи применяются разные методы [1,2,3], среди которых – использование графо-логических моделей (*GL*-моделей) [4]. Отличительной особенностью *GL*-моделей является сочетание свойств графов и булевых функций: ребрам графа, чья связность моделирует отказ системы, приписываются булевы функции. Базовые ОМС  $K(m,n)$  и их модели ( $n$  – число процессоров системы,  $m$  – число отказов, к которым ОМС нечувствительна) отражают поведение сравнительно несложных систем в потоке отказов. Возможны ситуации, когда система становится неработоспособной при возникновении некоторых  $p$  отказов, в то же время оставаясь работоспособной при появлении других  $q$  отказов ( $q > p$ ). Возникает необходимость отобразить в *GL*-модели тот факт, что на различные комбинации отказов одинаковой кратности система может реагировать по-разному. Иными словами, при построении моделей реальных ОМС иногда приходится модифицировать базовые модели, построенные на основе циклических графов, в частности, путем проведения дополнительных ребер со своими функциями [5].

Однако при этом могут возникнуть так называемые попарные реберные циклы (ПРЦ) [6], которые усложняют и модель, и процесс ее преобразования.

Суть попарных реберных циклов заключается в следующем. Пусть имеются 3 вектора состояния, появление каждого из которых приводит к выпадению в модели двух ребер. Допустим, что при появлении первого вектора состояния из модели удаляются ребра  $i$  и  $j$ , при появлении второго вектора состояния – ребра  $j$  и  $k$ , при появлении третьего вектора состояния – ребра  $i$  и  $k$ . Ребра  $i, j, k$  составляют, таким образом, своеобразный цикл, который и будем называть попарным реберным циклом (ПРЦ). В описанном примере ПРЦ состоит из трёх ребер, хотя в общем случае ПРЦ может содержать  $p$  ребер ( $2 \leq p \leq n$ ).

### 2. Оценка числа векторов

Из [6] следует, что тройка векторов состояния ОМС, вызывающих появление в *GL*-модели определенного ПРЦ, не всегда является единственной. Попробуем определить количество различных комбинаций трех векторов из множества  $W$ , вызывающих один и тот же ПРЦ, для рассматриваемого в [6] случая  $K(3,n)$ . Это может оказаться полезным при дальнейших преобразованиях *GL*-модели. Напомним, что  $W$  – это множество векторов, имеющих 4 нулевых компоненты.

Вначале определим число векторов, которые приводят к пропаданию пары ребер, и используем для этого дерево иерархии. Для удобства читателя приведем пример реберных функций *GL*-модели  $K(3,31)$  и соответствующего дерева иерархии, взятых из [6]. Дерево показано на рис.1, а реберные функции модели (каждая из которых соответствует какой-то вершине дерева), полученные по [7], следующие:

$$\begin{aligned}
f_1 &= x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\
f_2 &= (x_1 \vee x_2)(x_1 x_2 \vee x_3) \vee x_4 x_5 x_6 x_7 \\
f_3 &= x_1 x_2 x_3 \vee (x_4 \vee x_5)(x_6 \vee x_7)(x_4 x_5 \vee x_6 x_7) \\
f_4 &= x_4 x_5 \vee x_6 \vee x_7 \\
f_5 &= x_4 \vee x_5 \vee x_6 x_7 \\
f_6 &= x_8 x_9 \vee x_{10} \vee x_{11} \\
f_7 &= x_8 \vee x_9 \vee x_{10} x_{11} \\
f_8 &= (x_8 \vee x_9)(x_8 x_9 \vee x_{10} x_{11})(x_{10} \vee x_{11}) \vee x_{12} x_{13} x_{14} x_{15} \\
f_9 &= x_8 x_9 x_{10} x_{11} \vee (x_{12} \vee x_{13})(x_{12} x_{13} \vee x_{14} x_{15})(x_{14} \vee x_{15}) \\
f_{10} &= x_{12} x_{13} \vee x_{14} \vee x_{15} \\
f_{11} &= x_{12} \vee x_{13} \vee x_{14} x_{15} \\
f_{12} &= \overbrace{(x_1 \vee x_2)(x_1 x_2 \vee x_3)(x_1 x_2 x_3 \vee x_4 x_5 x_6 x_7)(x_4 \vee x_5)(x_6 \vee x_7)(x_4 x_5 \vee x_6 x_7)}^{\sigma_1} \vee \\
&\vee x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} x_{15} \\
f_{13} &= \overbrace{(x_8 \vee x_9)(x_{10} \vee x_{11})(x_8 x_9 \vee x_{10} x_{11})(x_{12} \vee x_{13})(x_{14} \vee x_{15})(x_{14} x_{15} \vee x_{12} x_{13})(x_8 x_9 x_{10} x_{11} \vee x_{12} x_{13} x_{14} x_{15})}^{\sigma_2} \vee \\
&\vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \\
f_{14} &= [\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \vee x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} x_{15})] \vee x_{16} x_{17} x_{18} \dots x_{31} \\
f_{15} &= \overbrace{(x_{16} \vee x_{17})(x_{18} \vee x_{19})(x_{16} x_{17} \vee x_{18} x_{19})}^{\sigma_3} \vee x_{20} x_{21} x_{22} x_{23} \\
f_{16} &= \overbrace{(x_{20} \vee x_{21})(x_{22} \vee x_{23})(x_{20} x_{21} \vee x_{22} x_{23})}^{\sigma_4} \vee x_{16} x_{17} x_{18} x_{19} \\
f_{17} &= x_{20} x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23} \\
f_{18} &= x_{20} \vee x_{21} \vee x_{22} x_{23} \\
f_{19} &= x_{16} \vee x_{17} \vee x_{18} x_{19} \\
f_{20} &= x_{16} x_{17} \vee x_{18} \vee x_{19} \\
f_{21} &= \overbrace{(x_{24} \vee x_{25})(x_{26} \vee x_{27})(x_{24} x_{25} \vee x_{26} x_{27})}^{\sigma_5} \vee x_{28} x_{29} x_{30} x_{31} \\
f_{22} &= \overbrace{(x_{28} \vee x_{29})(x_{30} \vee x_{31})(x_{28} x_{29} \vee x_{30} x_{31})}^{\sigma_6} \vee x_{24} x_{25} x_{26} x_{27} \\
f_{23} &= x_{28} \vee x_{29} \vee x_{30} x_{31} \\
f_{24} &= x_{28} x_{29} \vee x_{30} \vee x_{31} \\
f_{25} &= x_{24} \vee x_{25} \vee x_{26} x_{27} \\
f_{26} &= x_{24} x_{25} \vee x_{26} \vee x_{27}
\end{aligned}$$

$$f_{27} = \overbrace{\sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot (x_{16}x_{17}x_{18}x_{19} \vee x_{20}x_{21}x_{22}x_{23})}^{\delta_1} \vee x_{24}x_{25} \dots x_{31}$$

$$f_{28} = \overbrace{\sigma_5 \cdot \sigma_6 \cdot (x_{24}x_{25}x_{26}x_{27} \vee x_{28}x_{29}x_{30}x_{31})}^{\delta_2} \vee x_{16}x_{17} \dots x_{23}$$

$$f_{29} = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot (x_{16}x_{17} \dots x_{23} \vee x_{24}x_{25} \dots x_{31}) \vee x_1x_2x_3 \dots x_{15}$$

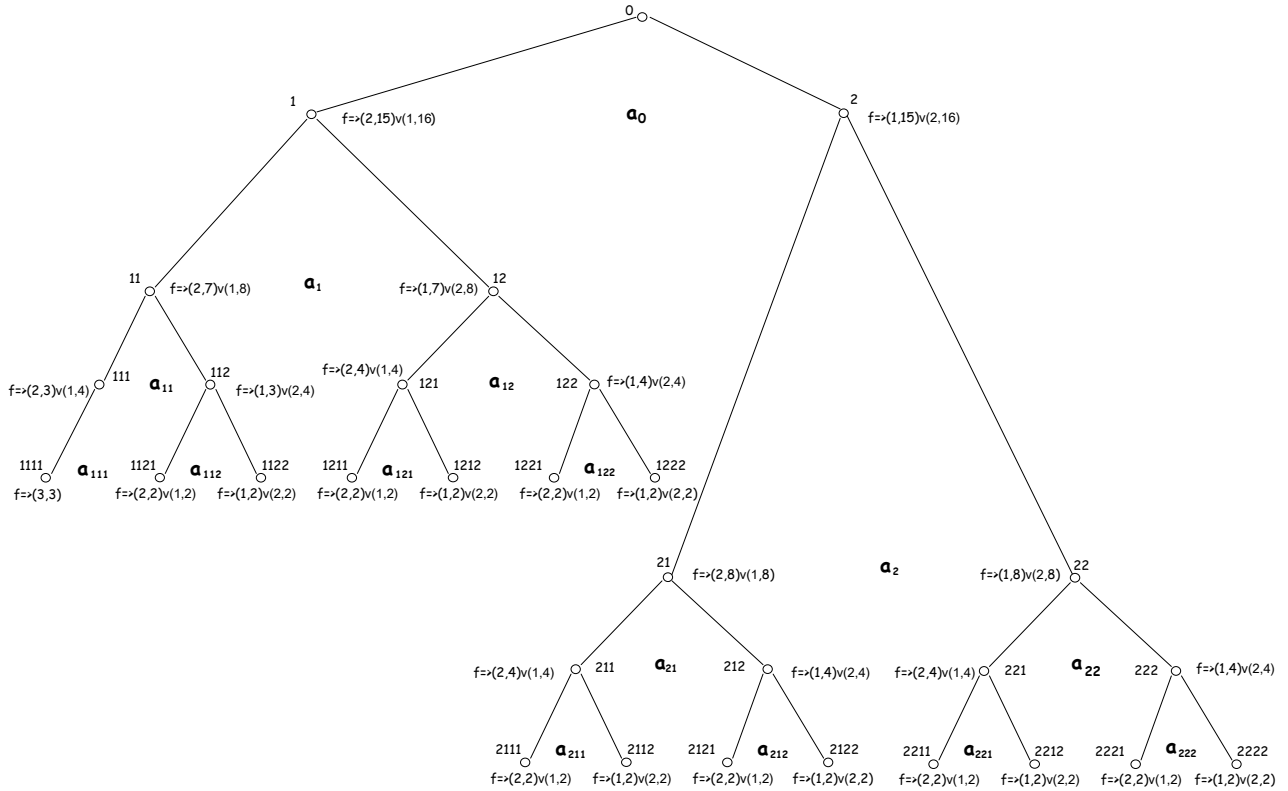


Рис. 1.

Обратимся к утверждению 2 из [6] и рассмотрим условие а) то есть, случай с двумя вершинами одного уровня. Если вспомнить, что функции, приписываемые ребрам, соответствующим этим вершинам, представляются выражениями

$$f_{i1} = \varphi_1(2, n_1) \vee \varphi_2(1, n_2),$$

$$f_{i2} = \psi_1(1, n_1) \vee \psi_2(2, n_2),$$

то станет понятным, что число векторов из множества  $W$ , обнуляющих эту пару функций

$$S_{ii} = C_{n_1}^2 \times C_{n_2}^2,$$

поскольку каждая из них должна содержать по две нулевых компоненты в каждом из подмножеств  $n_1$  и  $n_2$  переменных. Для простоты в выражении для  $S_{ii}$  (и далее также для  $S_{ij}$ ) принимаем одно и то же обозначение –  $n_i$  – для множества  $n_i$  и его мощности. Например, ребра, соответствующие вершинам дерева 11 и 12, выпадают одновременно при появлении любого из  $C_7^2 \times C_8^2 = 588$  векторов. В то же время пропаданию ребер, соответствующих вер-

шинам 1121 и 1122, соответствует единственный вектор

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	...	$x_{31}$
1	1	1	0	0	0	0	1	...	1

С другой стороны, пара ребер, соответствующих вершинам, расположенным на одной ветви дерева, т.е. условию а) из утверждения 2 из [6], с функциями  $f_i$  (ближе к корню) и  $f_j$

$$f_i = \varphi_1(2, n_{i1}) \vee \varphi_2(1, n_{i2}),$$

$$f_j = \psi_1(2, n_{j1}) \vee \psi_2(1, n_{j2})$$

выпадает в GL-модели при появлении любого из  $S_{ij} = C_{n_{i2}}^1 \times C_{n_{j1}}^2 \times C_{n_{j2}}^1$  векторов. Действительно, напомним, что, в соответствии с принципом построения дерева, подмножества переменных  $n_{j1}$  и  $n_{j2}$  принадлежат множеству  $n_{i1}$ , и нулевые компоненты вектора в подмножестве  $n_{i1}$  расположены в строгом соответствии: две – в  $n_{j1}$  и одна – в  $n_{j2}$ . Четвертая нулевая компонента расположена в подмножестве  $n_{i2}$ , что в совокупности объясняет выражение для  $S_{ij}$ .

Перейдем к ПРЦ – они образуются тремя парами ребер. Докажем *Лемму*, которая в значительной степени упростит решение задачи.

Пусть множество векторов  $S_1$  обнуляет одну и ту же пару функций  $f_1$  и  $f_2$  в  $GL$ -модели, а множество  $S_2$  – пару функций  $g_1$  и  $g_2$ .

*Лемма*

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

Действительно, в противном случае нашёлся бы вектор  $w_i \in W$ , появление которого вызвало бы пропадание по крайней мере 3-х ребер в  $GL$ -модели, построенной по алгоритму, описанному в [7], что невозможно. Справедливость леммы не нарушается и в том случае, когда рассмотренные пары имеют общее ребро.

Лемма позволяет определить число комбинаций векторов, вызывающих появление конкретного ПРЦ, состоящего из трех ребер  $a, b$  и  $c$ :

$$S_{abc} = S_{ab} \times S_{ac} \times S_{bc}.$$

Очевидно, что количество этих комбинаций растет по мере приближения к корню дерева. Поскольку ребро, соответствующее вершине 0 отсутствует, максимум достигается во втором ярусе. Для нашего примера  $K(3,31)$  это вершины 2, 21, и 22. Минимум достигается на нижнем ярусе дерева, и существуют ПРЦ, которые образуются сравнительно небольшим числом комбинаций из трех векторов. В нашем примере ПРЦ, включающий вершины 112, 1121 и 1122, образуется 36-ю комбинациями из 3-х векторов  $w_i \in W$ .

### 3. Нижняя граница числа комбинаций из трех векторов $w_i \in W$ , образующих ПРЦ

Если в общем случае максимальное число  $P_{max}$  комбинаций трех векторов  $w_i \in W$ , образующих один и тот же ПРЦ, зависит от величины  $n$  и не может иметь границу в виде конкретного числа, то величину  $P_{min}$  (ее теоретическое значение) можно определить. Понятно, что системы (и модели)  $K(3,1)$  и  $K(3,2)$  не существуют. Модель  $K(3,3)$  содержит одно, а модель  $K(3,4)$  – два ребра, и на наличие ПРЦ их нет смысла исследовать. Модель  $K(3,5)$  содержит три ребра, и ее дерево иерархии имеет следующий вид (см. рис. 2):

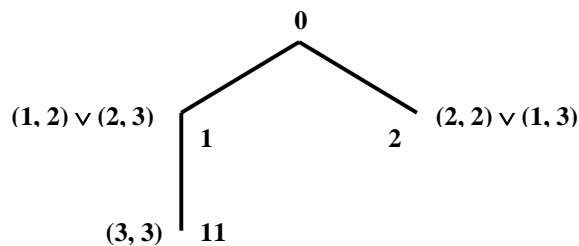


Рис. 2

Ребра, соответствующие вершинам 1, 2 и 11, не могут образовать ПРЦ, так как не соответствуют ни одному из условий утверждения 3 из [6].

То же самое можно сказать о модели  $K(3,6)$ , где четыре ребра (см. рис. 3). Напомним, что нулевая вершина не имеет соответствующего ребра в  $GL$ -модели.

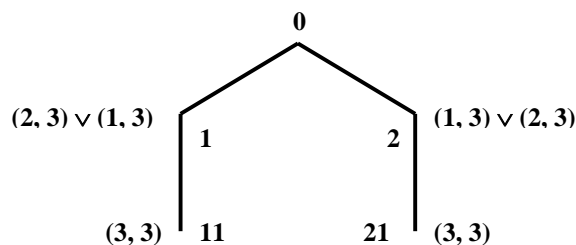


Рис. 3

Модель  $K(3,7)$  и ее дерево иерархии (см. рис. 4) свидетельствуют о возможности возникновения ПРЦ, как было сказано, в 36-ти случаях из трех векторов  $w_i \in W$ . Это и есть реальная граница  $P_{min}$  для  $GL$ -моделей, построенных по алгоритму [7].

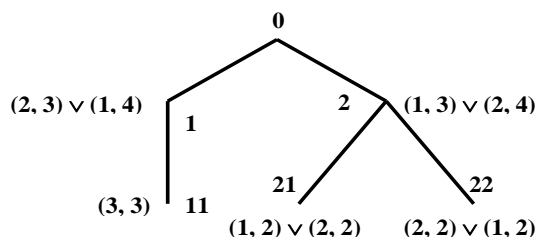


Рис. 4

Однако, если отклониться от требования разбиения множества переменных на две равные части, то ПРЦ оказывается возможным при  $n < 7$ . Действительно, для построения модели  $K(3,6)$  можно разбить переменные на подмножества  $\{x_1, x_2\}$  и  $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ . Модель будет иметь 4 ребра, а ее дерево иерархии (см. рис. 5)

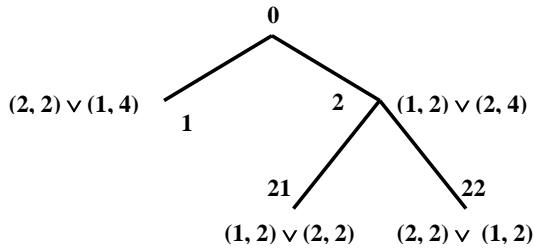


Рис. 5

позволяет определить число комбинаций из трех векторов ( $P=16$ ) для единственного ПРЦ, который может быть образован ребрами, соответствующими вершинам 2, 21 и 22. Однако и это еще не предел, ибо модель  $K(3,5)$  при разбиении переменных на подмножества  $\{x_1\}$  и  $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$  приведет к модели, содержащей всего 3 ребра, и дереву, не имеющему нулевой вершины (см. рис. 6).

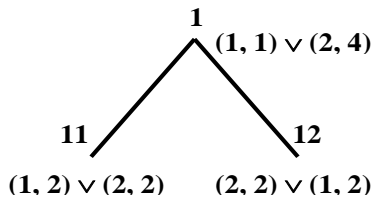


Рис. 6

Здесь единственный ПРЦ может быть образован всего четырьмя комбинациями из 3-х векторов  $w_i \in W$ . Случай  $K(3,4)$  и  $K(3,3)$  не рассматриваем, так как соответствующие модели имеют меньше 3-х ребер. Таким образом, теоретическая граница  $P_{\min}=4$ , и комбинации векторов следующие

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
1	0	0	0	0

Однако при этом имеет место нарушение упомянутого выше алгоритма формирования модели.

#### 4. Число различных ПРЦ

Мы рассматривали варианты множеств из 3-х векторов  $w_i \in W$ , которые образуют один и тот же ПРЦ. Иными словами для блокирования потери связности графом *GL*-модели при появлении любого из этих векторов понадобится в общей сложности 2 дополнительных ребра.

Интерес также представляет оценка числа  $E$  разных ПРЦ, которые могут быть образованы в модели. Приведем соотношение, позволяющее определить это число

$$E = r \cdot C_{q-1}^2 + \sum_{i=1}^{q-3} 2^{q-i} C_{q-i-1}^2 + s \cdot C_{q-1}^1 + \sum_{i=2}^{q-1} 2^{q-i} C_{q-i}^1$$

Здесь  $r$  – общее число вершин последнего каскада дерева иерархии;

$s$  – число парных вершин этого каскада;

$q$  – число каскадов дерева:  $q = [\log n] - 1$ ,  $[x]$  – ближайшее большее целое.

Доказательство этого соотношения достаточно громоздко, но несложно, поэтому мы его опускаем. Для приведенного выше дерева ( $n=31$ ) число различных ПРЦ составляет ( $r=15, s=7, q=4$ )

$$E = 15 \times 3 + 8 \times 1 + 7 \times 3 + 4 \times 2 + 2 \times 1 = 85$$

**В заключение** приведем некоторые количественные характеристики, полученные в результате эксперимента с выбранной выше в качестве примера *GL*-моделью  $K(3,31)$  на предмет возникновения ПРЦ (см. рис.7), представленные в виде графика. Здесь по горизонтали отмечается число  $t$  векторов  $w_i \in W$ , которые предстоит заблокировать; по вертикали – число  $\nu$  ПРЦ обоих видов, рассмотренных выше. Кривые отмечают число  $\nu_{\text{ср}}$  ПРЦ, которые возникают при появлении  $t$  векторов:  $\nu_{\text{ср}}$  – среднее значение числа ПРЦ при выполнении 5000 экспериментов со случайно выбранными множествами из  $t$  векторов. График иллюстрирует явную нелинейность зависимости. В то же время понятно, что при достижении некоторого значения  $t_n$ , зависящего от величины  $n$ , кривые будут более пологими.

Отметим также, что если два ПРЦ образованы разными ребрами, то вовсе не обязательно для их блокирования увеличивать вдвое число дополнительных ребер. В общем виде задача оптимального определения числа дополнительных ребер и места их проведения решена в [5].

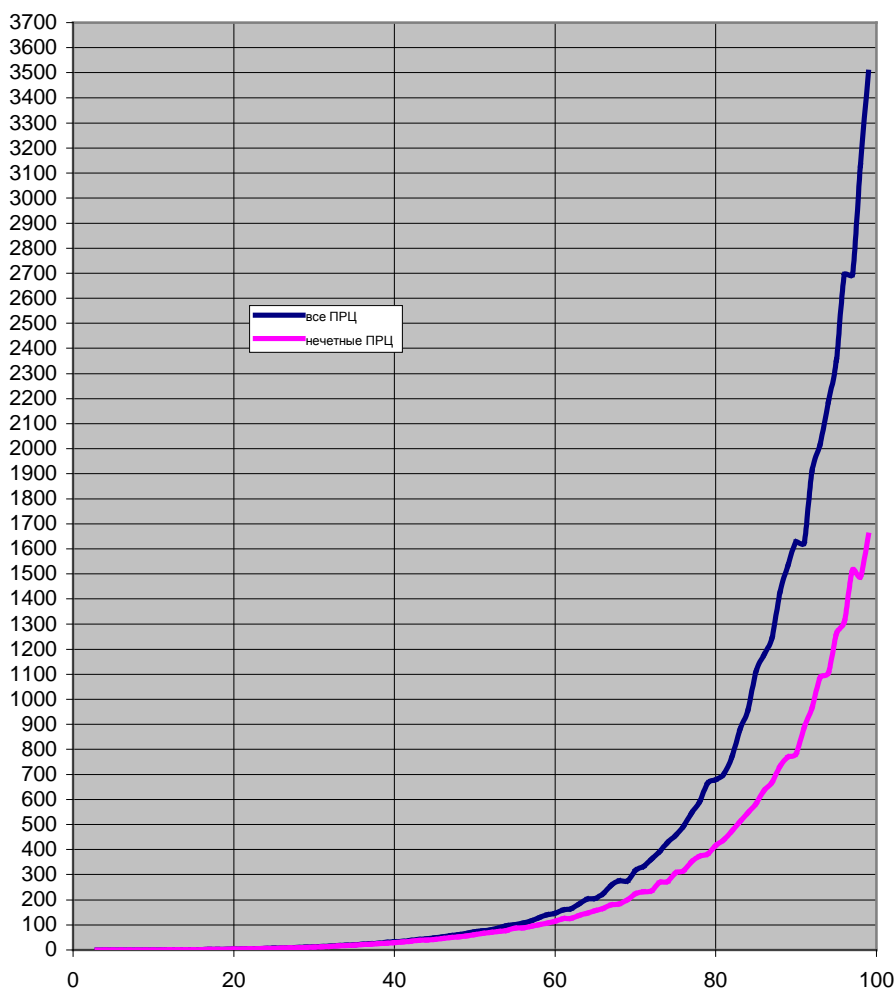


Рис. 7

## Список литературы

1. Многоверсионные системы, технологии, проекты / В.С.Харченко, В.Я.Жихарев, В.М.Илюшко, Н.В.Нечипорук. – Харьков: Нац. Аэрокосм. Ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2003. – 486 с.
2. H. Yamamoto, V.J. Zuo, T. Akiba, Z. Tian Recursive Formulas for the Reliability of Multi-State Consecutive- $k$ -out-of- $n$ :G Systems // IEEE Transactions On Reliability.– №1, Vol. 55.– March 2006.– p.98-105.
3. M.J. Zuo, D. Lin, Y. Wu Reliability evaluation of combined  $k$ -out-of- $n$ :F, consecutive- $k$ -out-of- $n$ :F and linear connected- $(r,s)$ -out-of- $(m,n)$ :F system strucyures // IEEE Transactions On Reliability.– №1, Vol. 49.– March 2000.– p.99-104.
4. Романкевич А.М., Карачун Л.Ф., Романкевич В.А. Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем // Электронное моделирование.– 2001.-т.23, №1.- С.102-111.
5. Романкевич А.М., Иванов В.В., Романкевич В.А. Анализ отказоустойчивых многомодульных систем со сложным распределением отказов на основе циклических GL-моделей // Электронное моделирование.–№5, т.26.– 2004.– с.67-81.
6. Романкевич В.А., Кононова А.А., Бахтари Хедаятоллах Условия существования попарных рёберных циклов в GL-моделях  $K(3,n)$  // Вісник НТУУ “КПІ”.– Інформатика, управління та ОТ.–2007.– №46.–С.54-61.
7. Романкевич В.А., Потапова Е.Р., Бахтари Хедаятоллах, Назаренко В.В. GL-модель поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем с минимальным числом теряемых рёбер // Вісник НТУУ “КПІ”.– Інформатика, управління та ОТ.–2006.– №45.–С.93-100.