УДК 681.322

МЄЛКОВСЬКА В.М.
СЕРГІЄНКО А.М.
СТІРЕНКО С.Г.

СПОСІБ ДЕМОДУЛЯЦІЇ СИГНАЛІВ З БАГАТОЧАСТОТНОЮ МОДУЛЯЦІЄЮ

Запропоновано виконувати демодуляцію сигналів з багаточастотною модуляцією за допомогою ковзного рекурсивного дискретного перетворення Фур′є (ДПФ) з використанням арифметики раціональних дробів, завдяки чому мінімізуються похибки обчислень. Висока ефективність таких обчислень перевірена в процесорі ДПФ, який реалізовано в програмованій логічній інтегральній схемі (ПЛІС).

An algorithm of the sliding recursive discrete Fourier transform (DFT) for the DTMF signal decoding. The algorithm uses the rational fraction numbers for the computational error minimization. The good parameters of the DFT processor configured in FPGA are achieved due to this algorithm implementation.

При багаточастотній модуляції (БЧМ) сигнал представляють як суміш кількох синусоїд з різними частотами, фазами і амплітудами. БЧМ широко використовується в техніці зв′язку, наприклад, як двохтональна багаточастотна модуляція (DTMF), багатоканальна модуляція з ортогональними сигналами (OFDM).

Сигнали з БЧМ детектують за допомогою гребінки вузькосмугових фільтрів. Якщо в спектрі сигнала частоти кратні, то для реалізації гребінки фільтрів використовують швидке перетворення Фур′є (ШПФ), як наприклад, у випадку OFDM-модуляції [1].

Для детектування сигналів з DTMF, коли частоти є невзаємнократними, набув широкого поширення алгоритм Герцеля, який обчислює дискретне перетворення Фур′є (ДПФ) окремо для кожного частотного каналу [2]. Недолік алгоритму Герцеля полягає в його нестабільності, що примушує виконувати обчислення з плаваючою комою, якщо необхідні стійкі оцінки амплітуд синусоїдальних сигналів.

Ковзне рекурсивне дискретне перетворення Фур′є (ДПФ) широко відоме в літературі, присв′яченій цифровій обробці сигналів, як простий алгоритм ДПФ, який має майже мінімальну кількість обчислень [1]. Передаточна функція одного k-го каналу N –точкового ДПФ виглядає як

$$H_k(z) = \frac{1 - z^N}{1 - z^{-1}W^k}, \tag{1}$$

де $W^k = e^{j2\pi k/N} = \cos\theta + j\sin\theta$ – комплексний обертаючий коефіцієнт. В порівнянні з поширеним ШПФ, це перетворення дає змогу виконувати розрахунки для будь-якого значення N і має переваги за апаратними витратами, якщо кількість каналів обробки істотно менше N. Крім того, при DTMF параметр N необхідно підбирати таким чином, щоб на N відліків сигналу припадало ціле число періодів вхідного синусоїдального сигналу з частотою, яка відповідає θ, що протирічить вибору розмірності ШПФ.

Передаточна функція (1) відповідає моделі ідеального резонатора з центральною частотою $\theta = 2\pi k/N$ від частоти дискретизації. Тому обчислення рекурсивного ДПФ нестійкі через похибку обчислень і через неточність представлення обертаючого коефіцієнта, модуль якого повинен бути строго рівним одиниці. Для реалізації рекурсивного ДПФ в пристроях обробки сигналів, наприклад, в фільтрах з частотною виборкою, складові z домножують на загрубляючий коефіцієнт, який трохи зсуває полюси функції (1) до центра одиничного кола [1].

В статті пропонується для виконання рекурсивного ДПФ використати обчислення з представленням чисел у вигляді раціональних дробів. Раціональний дріб a/b – це числовий об′єкт, який складається з цілочисельних чисельника a і знаменника b. Цей дріб має ту властивість, що він може з досить високою точністю наближатись до заданого ірраціонального або трансцендентного числа $x \approx a/b$. Раціональні дроби мають нескладний апарат арифметичних дій. Так, множення a/b на c/d дорівнює $ac/(bd)$, а додавання цих дробів – $(ad+bc)/(bd)$. При цьому власне ділення цілих чисел не виконується.

При порівнянні складності операцій слід прийняти до уваги, що розрядність чисельників і знаменників приблизно вдвічі менша, ніж така, що необхідна для операцій з цілими числами при такій самій точності представлення чисел. Тому складність апаратних суматорів дробів наближається до складності блоків множення цілих чисел, а складність блоків множення дробів приблизно вдвічі менше, ніж блоків множення цілих чисел. Ефективність арифметики дробів перевірена при вирішенні задач лінійної алгебри на спеціалізованих обчислювачах [3]. Ця арифметика підтримується також тим, що в сучасних програмованих логічних інтегральних схемах (ПЛІС), які часто використовуються для цифрового декодування сигалів, кількість вбудованих блоків множення досягає кількох сотен і в багатьох випадках вони не всі використовуються.

Обчислення згідно зі знаменником дробу (1) виконуються у відповідності з наступними різницевими рівняннями

$$YR(i+1) = YRi\cdot\cos\theta - YIi\cdot\sin\theta + XRi;$$
$$Y_{I(i+1)} = Y_{Ii}\cdot\cos\theta + Y_{Ri}\cdot\sin\theta + X_{Ii}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{X}_i = X_{Ri} + jX_{Ii}$ – відліки, що дорівнюють різниці відліків вхідного сигналу і таких самих відліків, затриманих на N тактів, $\boldsymbol{Y}_i = Y_{Ri} + jY_{Ii}$ – відліки ковзного спектру на частоті θ. При виконанні обчислень вектор $\boldsymbol{Y}_{i+1}$, який повернуто на кут θ подається на вхід формул (2) як $\boldsymbol{Y}_i$. При умові точних обчислень, якщо не справджується рівність Піфагора: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, то похибка обчислення вектора $\boldsymbol{Y}_{i+1}$ призведе до швидкого згасання, або збудження синусоїдальної складової з частотою θ, яка знаходиться в сигналі $\boldsymbol{X}_i$.

Задача Піфагора полягає в знаходженні всіх прямокутних трикутників з цілочисельними сторонами, тобто у вирішенні діофантового рівняння:

$x^2 + y^2 = z^2$.

З цього рівняння і рівності Піфагора виходить, що для деяких кутів θ синуси і косинуси дорівнюють раціональним числам: $\sin\theta = x/z$, $\cos\theta = y/z$. Рішення задачі Піфагора знаходяться з відношень:

$x = 2mn$; $y = m^2 - n^2$; $z = m^2 + n^2$,

де m і n – взємно прості числа і m > n [4]. Таким чином, підбираючи m і n, можна знайти точні значення синуса і косинуса для деякого кута θ′ ≈ θ. Так, наприклад, cos(2π/128) = 1304/26585 і sin(2π/128) = 26533/26585 з похибкою кута 0,001˚. Для порівняння, якщо взяти аппроксимацію цих коефіцієнтів цілими 16-розрядними числами, то похибка довжини вектора складе 14.5·10-6, а похибка кута – 0,0002˚. Представлення коефіцієнтів у рівняннях (2) раціональними дробами, які є розв′язками задачі Піфагора, дає змогу реалізувати процесор ковзного перетворення Фур′є зі стабільними обчисленнями.

Для демодуляції DTMF-сигналів, які широко використовуються в телефонії, були одержані набори коеффіцієнтів, які представлені в таблиці. Ці коеффіцієнти підібрані для частоти дискретизації 8 кГц і 16-розрядного представлення даних. Параметр ε дорівнює відхиленню центральної частоти канала від номінальної.

Частота, Гц	N	x	y	z	ε %
697	241	16416	26937	31545	-0.019
770	187	7412	10725	13037	0.005
852	169	18696	23647	30145	-0.024
941	170	15620	17139	23189	0.0004
1209	225	20732	14835	25493	0.016
1336	102	22680	13039	26161	-0.025
1477	130	28712	12495	31313	0.026
1633	147	8400	2489	8761	0.014

Була розроблена бібліотека обчислювальних модулів для реалізації арифметики раціональних дробів, які описані на мові VHDL і призначені для конфігурування в ПЛІС. Для досягнення високої пропускної спроможності, моделі блоків множення і додавання виконані з двома і чотирма конвейерними ступенями, відповідно.

В сигнальному графі алгоритму ковзного рекурсивного ДПФ до дуг додано вузлів затримок (зафарбовані прямокутники), кількість яких відповідає конвейерним затримкам блоків множення і додавання (рис.1).

Загальна кількість затримок, які включені в усі циклічні маршрути графа на рис.1, означає, що цей сигнальний граф є результатом згортки 10 однакових сигнальних графів обчислення окремих спектральних каналів ДПФ [5]. Лінія затримки ЛЗ виконана з відводами для регулювання затримки на N відліків в залежності від номеру спектрального каналу (див. табл.). Таким чином, структура обчислювача, яка побудована за цим графом, виконує паралельні обчислення десяти каналів ДПФ в конвейерному режимі.

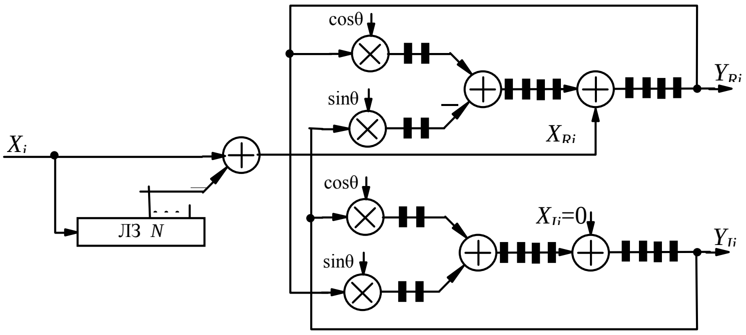

Рис.1. Сигнальний граф, що відповідає рекурсивному ДПФ

За сигнальним графом на рис.1 у відповідності з методикою, приведеною в [5], був розроблений проект процесора ковзного ДПФ, зконфігурованого в ПЛІС Xilinx xc4vsx35-12. Процесор виконує операції з 18-розрядними чисельниками і знаменниками. Він має апаратні витрати 627 еквівалентних конфігурованих логічних блоків (ЕКЛБ, CLB slices), 14 блоків множення DSP48 і тактову частоту до 200 МГц. Це означає, що процесор обробляє вхідний сигнал з максимальною частотою дискретизації 20 МГц.

При іспитах моделі процесора, що виконує ковзний рекурсивний ДПФ для N = 128 і $\theta = 2\pi/N$ з плаваючою комою з подвійною точністю оцінка амплітуди гармоніки вхідного сигналу мала похибку до 4-5%. При тих самих умовах процесор з арифметикою дробів виконував обчислення з похибкою 10-26%.

Якщо на вхід процесора подавати синусоідальний сигнал з частотою, що точно дорівнює θ, то через N тактів на виході суматора, який віднімає від вхідного сигнала затриманий сигнал, отдержується нульовий сигнал. При цьому схема повинна генерувати стабільний синусоідальний сигнал з частотою θ і амплітудою, що дорівнює амплітуді вхідного сигналу. При цих умовах процесор генерував такий сигнал протягом кількох тисяч тактів дискретизації, а в аналогічному процесорі з цілочисельною арифметикою вихідний сигнал згасав до нуля. Це свідчить про досить високу стабільність процесора, в якому демодуляція БЧМ виконується запропонованим способом.

Було розроблено фільтр з частотною виборкою [1], який складається з рекурсивного процесора ДПФ, до виходу якого приєднано блок зваженого додавання і перетворення дробу в цілий результат. Сумарні апаратні витрати складають 1230 ЕКЛБ і 16 DSP48. В порівнянні з аналогічним фільтром на базі процесора ШПФ, даний фільтр при приблизно однакових апаратних витратах має втричі більшу частоту дискретизації вхідного сигналу.

Таким чином, впровадження в декодер БЧМ арифметики раціональних дробів дало змогу виконувати ковзне рекурсивне ДПФ високостабільним з точністю, що наближається до точності арифметики з плаваючою комою. Це також дало змогу одержати малі апаратурні витрати і високу тактову частоту процесора. На відміну від алгоритму Герцеля, ковзний ДПФ дає змогу безперервно слідкувати за зміною гармонік вхідного сигналу і одержати більш точну оцінку їхніх амплітуд і фаз.

Запропонований алгоритм рекурсивного ДПФ також може бути впроваджений в сигнальних мікропроцесорах з 16-розрядним представленням даних, завдяки чому оцінка амплітуд складових сигналу стає стабільною і для цього не потрібне використання плаваючої коми або чисел з подвійною розрядністю.

Перелік посилань

1. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь. –1979. – 416 с.
2. Chen *C. J.* Modified Goertzel Algorithm in DTMF Detection Using the TMS320C80 //Texas Instruments Inc. Application Report. SPRA066. –USA. –June, 1996. –13 p.
3. Клименко О.М., Сергієнко А.М., Шевченко Ю.В., Овраменко С.Г. Конфігурована обчислювальна система для вирішення задач лінійної алгебри // Электронное моделирование.–2005.–Т.27.-№1.–С.109-114.
4. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М.: Наука. –Биб-ка Квант, вып.3. – 1980. –126с.
5. Сергиенко А.М. VHDL для пректирования вычислительных устройств. – Киев: ДиаСофт. – 2003. – 203 с.