

ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ БАЛОЧНЫХ СТРУКТУР

Предлагается использование конечно-элементной математической модели для получения эквивалентной электрической схемы замещения механических компонентов. Для уменьшения размерности полученных схем предложено использование RLC сокращения. Рассмотрен пример получения эквивалентной электрической схемы балочной структуры. Данный подход распространен на получение эквивалентных схем для МЭМС компонентов.

The usage of a finite-element mathematical model to obtain an equivalent electrical circuit for mechanical components is suggested. Using of RLC reduction algorithm to reduce a dimension of the circuits obtained is proposed. An example of getting equivalent electrical circuit for beam structure is considered. The approach in question is applied to obtaining equivalent circuits for MEMS components.

Введение

При проектировании современных МЭМС-устройств важную роль играет возможность использования единого инструментария для моделирования объектов, в которых протекают различные физические процессы: электрические, механические, оптические, тепловые и т.д. Это требует представления различных подсистем исходного объекта в виде эквивалентных моделей одной и той же физической природы, что позволит объединить их для решения в едином вычислительном процессе. Однако наиболее распространенные САПР, в основном, используют одноаспектное моделирование, например, Spice для анализа электронных схем или Adams для виртуального моделирования сложных машин и механизмов. Для расчета «нетрадиционных» для данных систем физических процессов используют несколько подходов: учет физических особенностей в виде дополнительных параметров базовых моделей; включение возможности расчета в дополнительных базисах, характерных для иных физических процессов и т.д.

На этапе схемотехнического моделирования для формирования математической модели объекта сложной физической природы наиболее часто применяется метод электромеханических аналогий. Это, в свою очередь, требует наличия схемных реализаций моделей неэлектрических блоков, обладающих необходимой степенью точности. Большинство современных средств САПР, применяемых при проектировании механических систем, для построения математической модели используют метод конечных элементов. Основной проблемой использования таких моделей яв-

ляется размерность получаемых систем, которые могут описываться десятками тысяч уравнений. Поэтому основные усилия разработчиков направлены на получение сокращенных моделей, пригодных для дальнейшего использования.

Таким образом, актуальной является разработка алгоритма получения моделей неэлектрических объектов в виде эквивалентных электрических схем на основе готового инструментария построения математической модели для применения в пакетах схемотехнического проектирования.

Описание примера

Рассмотрим метод построения схемных моделей механических компонентов и их дальнейшее использование на примере задачи нахождения собственных частот балки (рис. 1).

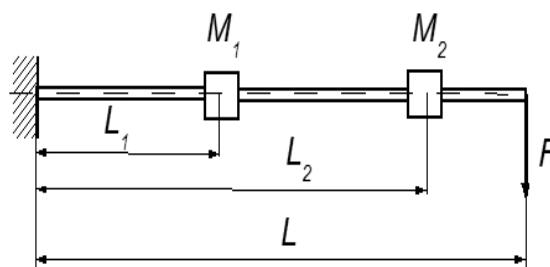


Рис. 1. Схема закрепленной неоднородной балки с тремя степенями свободы

Рассматриваемая конструкция представляет собой балку, работающую на изгиб. Левый конец балки закреплен неподвижно, правый — свободен. К правому концу приложена сила F , перпендикулярная оси балки. В двух точках

к балке прикреплены сосредоточенные массы M_1 и M_2 , находящиеся на расстояниях L_1 и L_2 от точки закрепления.

Для построения математической модели был использован пакет ANSYS Multiphysics v.10.0, разработанный компанией ANSYS Inc. [1]. Моделирование в ANSYS выполнялось при следующих параметрах: $L = 25$ мм; $L_1 = 10$ мм; $L_2 = 20$ мм; поперечное сечение балки — прямоугольное: высота 3 мм, ширина 2 мм. Характеристики материала балки: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; плотность материала $\rho = 6 \cdot 10^3$ кг/м³. Массы грузов: $m_1 = m_2 = 36$ г.

Для дискретизации балки были использованы конечные элементы типа BEAM3 из библиотеки ANSYS. Каждый балочный элемент имеет два узла (левый/правый) с 3 степенями свободы в каждом: координаты x, y в плоскости движения и угол θ поворота соответствующего поперечного сечения балки. Все элементы имеют одинаковую длину по 0,5 мм. Соответственно, расчетная схема содержит 50 элементов и 51 узел.

Эквивалентная схема замещения

Для данного механического компонента, из файлов проекта ANSYS (FULL и EMAT) с помощью программы mot4ansys [2] были получены матрицы, описывающие состояние системы, в формате MarketMatrix. Матрицы представляют собой коэффициенты уравнения

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = BF, \quad y = Cx$$

где M, D и K – матрицы массы, демпфирования и жесткости соответственно; B – матрица входов; C – матрица выходов; x – вектор неизвестных, включающий все степени свободы; F – внешний вектор силы и y – вектор выходных переменных.

Переходя к электромеханическим аналогиям [3], получим:

$$\frac{d}{dt}(Mv) + Dv + \int Kvd t = F(t)$$

или

$$\tilde{C}\dot{v} + \tilde{G}v + \tilde{L}v = F(t),$$

где $\tilde{C} = M, \tilde{G} = D, \tilde{L} = K$ – равноценные матрицы емкостей, проводимостей и индуктивностей. Элементы матриц C, G, L формируются из элементов матриц M, D и K по формулам:

$$C_{ij} = -m_{ij}, \quad i, j = 1(1)N, \quad i \neq j$$

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^N m_{ij}, \quad i = 1(1)N.$$

$$L_{ij} = -1/k_{ij}, \quad i, j = 1(1)N, \quad i \neq j$$

$$L_{ii} = 1/\sum_{j=1}^N k_{ij}, \quad i = 1(1)N.$$

$$G_{ij} = -d_{ij}, \quad i, j = 1(1)N, \quad i \neq j$$

$$G_{ii} = \sum_{j=1}^N d_{ij}, \quad i = 1(1)N.$$

где N – количество уравнений для данной системы. Используя полученные матрицы C, G, L , можно перейти к эквивалентной схеме замещения. В отдельных случаях, некоторые из этих матриц могут отсутствовать. Это будет означать, что в схеме будут отсутствовать соответствующие элементы. Для рассматриваемого примера, эквивалентная схема замещения представлена на рис. 2.

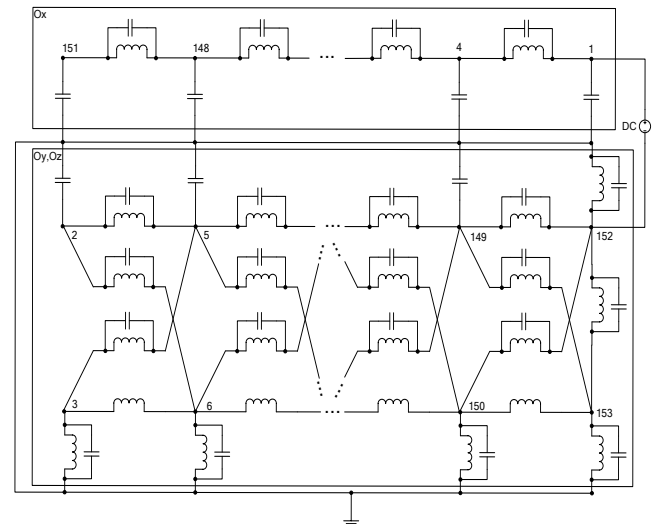


Рис.2. Эквивалентная схема замещения балки

В данной схеме подсхемы «Ox» и «Oy, Oz» связаны только по нулевому узлу схемы. Очевидно, что при подключении одного источника к узлу приложения силы для механического эквивалента, будут наблюдаться только частоты одной из подсхем. Так, для представленного примера при подключении источника между узлами 151, 0 будут наблюдаться частоты, которые в механической модели отвечают собственным частотам на растяжение. В случае источника, подключенного между узлами 152, 0 выходная характеристика будет содержать только частоты, соответствующие собственным частотам изгиба. С точки зрения ме-

ханики, такая ситуация представляет собой два независимых направления, по которым раскладывается начальный вектор силы. Для эквивалентной схемы это означает включения источника между обеими подсхемами, либо включение двух источников для возбуждения соответствующих подсхем.

Сокращение размерности схемы

Для объектов со сложной геометрией и большим количеством степеней свободы конечно-элементная модель может содержать сотни тысяч уравнений. В этом случае эквивалентная схема замещения может содержать миллионы и более элементов. Это обстоятельство делает невозможными использование данной схемы в качестве модели объекта, поэтому целесообразно воспользоваться алгоритмами сокращения размерности схемы на основе Y-Δ преобразования. Суть методов, основанных на Y-Δ преобразовании, изложена в [4,5,6].

Для каждого узла в цепи определены две временные постоянные: $\tau_{RCi} = C_i / G_i$ и

$$\tau_{LCi} = \sqrt{C_i / B_i}, \text{ где } C_i = \sum_{j=1}^k c_j - \text{сумма всех ем-}$$

костей, $B_i = \sum_{j=1}^k b_j - \text{сумма всех реактивных}$

проводимостей (величина, обратная индукти-

вности), $G_i = \sum_{j=1}^k g_j - \text{сумма всех проводимос-}$

тей, подключенных к узлу i .

Узловая постоянная времени узла i определяется как:

$$\tau_i = \max(\tau_{RCi}, \tau_{LCi}).$$

i -ый узел считается быстрым, если:

$$\tau_i < \tau_{\min} = 2\pi / \omega_{\max},$$

где τ_{\min} - временная постоянная, определенная пользователем, которая зависит от максимальной частоты цепи - ω_{\max} . Отметим, что τ_{\min} пропорционально $1/\omega_{\max}$.

На практике, интерес обычно представляют нижние собственные частоты, которые являются рабочими для механических систем. Поэтому вариацией τ_{\min} достигается компромисс

между точностью и размерностью получаемых моделей.

Результаты моделирования

Расчетом определены 6 первых собственных частот конструкции. Результаты частотного анализа, полученные с использованием пакета ANSYS Multiphysics, а также в результате моделирования в пакете NetALLTED [7,8] эквивалентной и сокращенных при различных значениях τ_{\min} схем представлены в таблице 1.

Результаты моделирования в пакетах ANSYS и NetALLTED совпадают, что свидетельствует о том, что переход от модели, полученной с помощью метода конечных элементов, к эквивалентной схеме замещения не вносит дополнительные погрешности. Как видно из таблицы 1, погрешность моделирования схемы при $\tau_{\min} = 10^{-5}$, по сравнению с результатами ANSYS, составляет менее 1%, что свидетельствует о высокой точности реализованной модели. При этом размерность сокращенной модели по сравнению с несокращенной уменьшилась более чем в 5 раз.

Выходные характеристики эквивалентной и сокращенных при различных значениях τ_{\min} схем представлены на рис. 4-7.

Выводы

Изложенный в работе метод построения моделей механических компонентов позволяет использовать пакеты схемотехнического проектирования в качестве единого инструментария для моделирования электромеханических объектов. Использование сокращения на основе Y-Δ преобразования позволило получить модели с необходимой степенью точности, не уступающей на этапе получения эквивалентной схемы замещения точности математической модели, полученной с помощью метода конечных элементов. Предложенный метод может быть использован для расчета МЭМС, а в общем случае расширен и на объекты немеханической природы при условии возможности получения их математической модели в виде конечно-элементных матриц.

Таблиця 1

	ANSYS	NetALLTED			
		Экви-вал. схема	Сокращенная схема		
τ_{min}	-	-	$3 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}
Количество узлов	-	151	16	23	28
Количество элементов	-	776	94	119	145
Сокращение по узлам, %	-	-	89.404	84.7682	81.457
Сокращение по элементам, %	-	-	87.8866	84.6649	81.3144
1 пик, Гц	13.993	13.988	13.768	13.390	14.258
2 пик, Гц	91.795	91.794	90.548	91.589	91.477
3 пик, Гц	176.29	176.29	176.25	176.28	176.29
4 пик, Гц	477.44	477.44	476.60	477.21	477.27
5 пик, Гц	495.69	495.69	611.01	529.98	493.82
6 пик, Гц	861.83	861.82	1043.8	920.16	861.35
Максимальная погрешность, %	-	-	23.31	6.96	0.34

Результаты моделирования

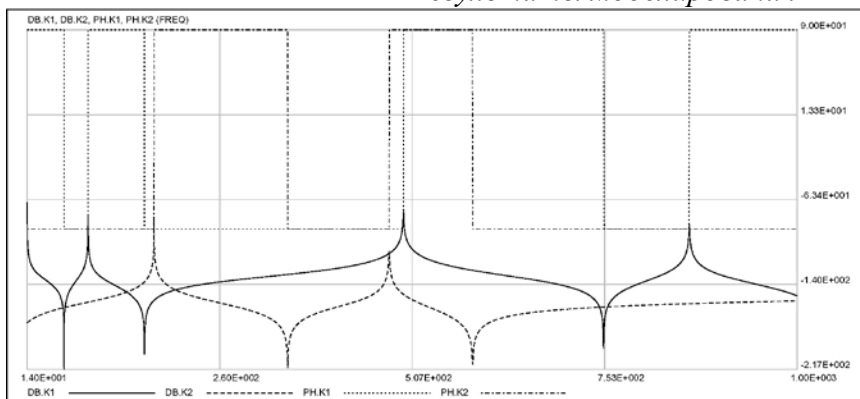


Рис. 4. АЧХ, ФЧХ эквивалентной схемы замещения для закрепленной неоднородной балки с тремя степенями свободы (несокращенный вариант)

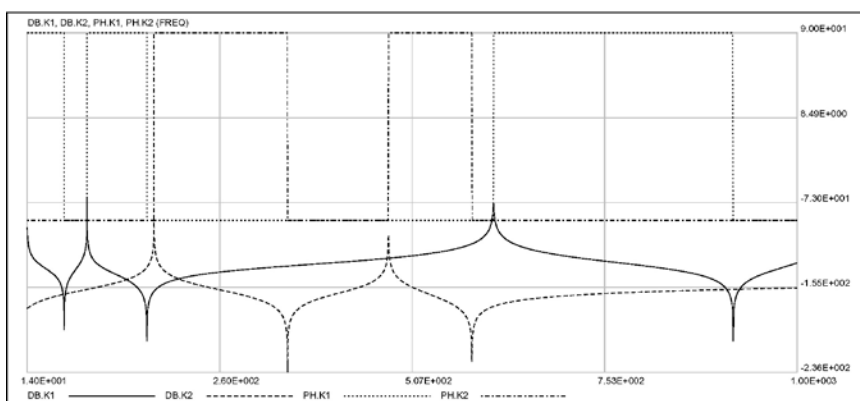


Рис. 5. АЧХ, ФЧХ эквивалентной схемы замещения для закрепленной неоднородной балки с тремя степенями свободы (сокращенный вариант, $\tau_{min} = 3 \cdot 10^{-5}$)

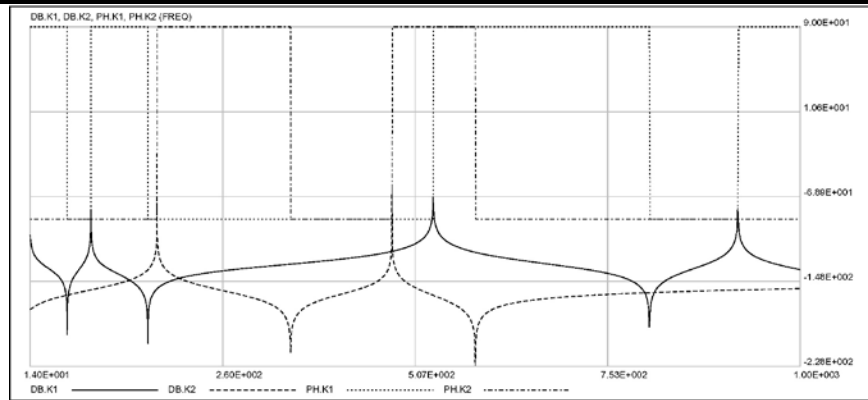


Рис. 6. АЧХ, ФЧХ эквивалентной схемы замещения для закрепленной неоднородной балки с тремя степенями свободы (сокращенный вариант, $\tau_{\min} = 1.5 \cdot 10^{-5}$)

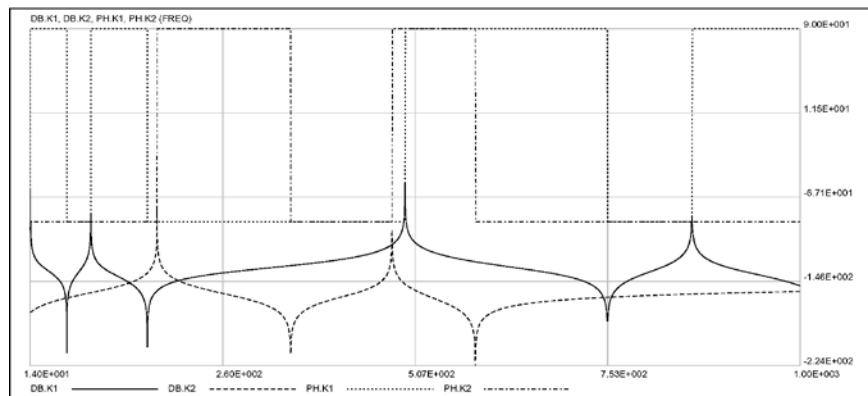


Рис. 7. АЧХ, ФЧХ эквивалентной схемы замещения для закрепленной неоднородной балки с тремя степенями свободы (сокращенный вариант, $\tau_{\min} = 10^{-5}$).

Список литературы

5. Ansys Inc.: <http://www.ansys.com/>.
6. Rudnyi E., Lienemann J., Greiner A., Korvink J. G. mor4ansys: Generating Compact Models Directly from ANSYS Models // Technical Proceedings of the 2004 Nanotechnology Conference and Trade Show (Nanotech 2004, March 7-11, 2004). – Boston, Massachusetts, USA, vol. 2. – P. 279-282.
7. Hsu J. T., Vu-Quoc L. A rational formulation of thermal circuit models for electrothermal simulation. – part 1: Finite element method // IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications, vol. 43, 1996. – P. 721-732.
8. Руденко Ю.А., Ладогубец В.В., Ладогубец А.В. Алгоритм уменьшения размерности RLC цепей // Электроника и связь. – 2004. - №21. – с. 72-74.
9. Sheehan B.N. TICER: Realizable Reduction of Extracted RC Circuits // Digest of Technical Papers IEEE/ACM Proc. of ICCAD. – 1999. – p. 200-203.
10. Chirayu S.A., Masud H.C., Yehea I.I. Realizable RLCK Circuit Crunching // Proceedings of the 40th conference on design automation 2003. - Anaheim, CA, USA. - 2003. – p. 226 – 231.
11. Petrenko A., Ladogubets V., Tchkalov V., Pudlowski Z. ALLTED – a computer-aided engineering system for electronic circuit design. – Melbourne: UICEE, 1997, 205 p.
12. Петренко А.І. Мережний пакет для комп'ютерного проектування мікро-електромеханічних систем (MEMS) // Розвиток інформаційно-комунікаційних технологій та розбудова інформаційного суспільства в Україні. – К.: Зв'язок, 2007. – С. 143-156.