УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
ИВАНОВА А.А.,
ШТАНЬКЕВИЧ А.С.,
ФЕДОТОВ А.П.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ (ВЕРСИИ 2, 3)

В статье предлагаются модификации метода анализа иерархий. Модификации МАИ приведены для двухуровневой иерархии, затем полученные результаты адаптируются для общего случая. Приведены результаты статистических исследований, доказывающих эффективность данных модификаций по сравнению с классическим МАИ.

This article deals with the modifications of AHP. These modifications are developed for two levels hierarchy, then the results have been adapted for general case. The results of statistic researches, proving the effectiveness of the given modifications in comparison with classical AHP, are also proposed in the article.

В этой статье модели оптимизации [1-4] будут использованы для расширения области применения МАИ на случай большого количества альтернатив, (существенно превышающего их обычное количество, при котором применение МАИ считается корректным). Такая задача может возникнуть в двух случаях:

а) наилучшая альтернатива не выбирается из набора реально существующих альтернатив, а альтернативы генерируются искусственно для выбора наилучшей, после чего в реализацию этой альтернативы вкладываются существенные ресурсы;

б) искусственно генерируются альтернативы; с помощью МАИ находятся их результирующие веса, по которым строится аналитическое описание глобальной цели.

Корректное обоснование предлагаемых модификаций МАИ возможно в случае, когда задается формальная модель, которой отвечают эмпирические матрицы парных сравнений последнего уровня иерархий МАИ. В этом случае можно исследовать эмпирические (статистические) свойства алгоритмов, их эффективность, предлагать практические рекомендации к использованию.

Рассмотрим произвольные альтернативы A_i, A_j, которые сравниваются экспертом (экспертами) по эффективности относительного произвольного критерия предыдущего уровня иерархии МАИ.

В идеальном случае, т.е. в случае, когда предполагается, что на эксперта не действуют факторы, искажающие его решение (его компетентность, количество альтернатив, для которых строится эмпирическая матрица парных сравнений, неоднозначность качественного описания критерия, технология и последовательность заполнения эмпирической матрицы парных сравнений, психологические факторы и т.д.), значение эмпирического коэффициента γ_{ij} (γ_{ij} показывает во сколько раз вес объекта A_i больше веса объекта A_j по отношению к заданной цели) не зависит ни от количества альтернатив, из которых находится наилучшая, ни от их состава. Тогда $\gamma_{ij} = \dfrac{\omega_i}{\omega_j}$ в любой эмпирической матрице парных сравнений при парном сравнении альтернативы A_i с альтернативой A_j, $\omega_i, \omega_j \geq 0$ интерпретируются как идеальные значения весов альтернатив A_i и A_j.

Теперь рассмотрим случай, когда реально на решение эксперта действуют возмущающие факторы. Формально действие этих факторов предлагается описывать с помощью параметрического вероятностного распределения [5]. Закономерности, определяющие значения и изменение значений параметров вероятностного распределения (вероятностных распределений) как и само вероятностное распределение (вероятностные распределения) являются формальной моделью факторов, искажающих решение эксперта (экспертов).

Примечание. Использовалось параметрическое равномерное распределение, как одно из наиболее жестких распределений, для исследования эффективности предложенных моделей оптимизации.

Сначала модификацию МАИ приведем для двухуровневой иерархии, затем полученные результаты адаптируем для общего случая. Необходимо отметить, что двухуровневая иерархия имеет самостоятельное практическое значение.

1. Модифицированный метод анализа иерархий для двухуровневой структуры

Пусть дерево иерархий имеет вид:

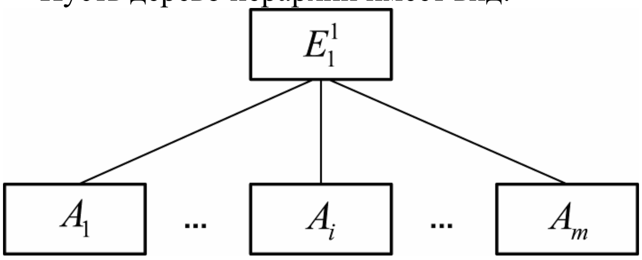

Рис. 1. Дерево иерархии с двухуровневой структурой

На рисунке 1 m – количество альтернатив, достаточно большое число.

1.1 ММАИ (третья версия)

Искажение идеальных значений γ_{ij} элементов эмпирической матрицы парных сравнений $\gamma_{ij}*$ не зависит от ее размеров. (Предполагается, что она заполняется блочно подматрицами размерности не превышающей 7 ÷ 9). Искажение $\gamma_{ij}*$ истинного значения γ_{ij} $(\forall\gamma_{ij} \geq 1, i \neq j)$ тем больше, чем больше γ_{ij} отличается от единицы.

Примечание. Для оценки весов $\omega_i, i = \overline{1,m}$; по прежнему используются только те элементы эмпирической матрицы парных сравнений для которых $\gamma_{ij}^* \geq 1\,(i \neq j)$.

Иными словами, чем больше альтернативы не сопоставимы между собой, тем больше ошибается эксперт. В этом случае веса альтернатив находятся по исходной эмпирической матрице парных сравнений (размерности $m \times m$) с помощью моделей оптимизации [1–4] с измененными функционалами: каждая составляющая функционала, соответствующая γ_{ij}, умножается на неотрицательный коэффициент, значение которого определяется из следующей посылки: величина его тем больше, чем меньше число $\gamma_{ij}*–1$ ($\gamma_{ij}*\geq 1$), взято из эмпирической матрицы парных сравнений.

Примечание. В этом случае используются модели 2 из [3] и модель из [4], которые в результате большого количества статистических экспериментов статистически значимо дают результаты лучше других моделей. Альтернатива с большим весом является наилучшей. Эффективными с аналогичным образом измененными функционалами также являются модели оптимизации, приведенные для эмпирических матриц парных сравнений с односторонними ограничениями [2].

Для эффективного использования ММАИ (третья версия) необходимо решить следующие задачи:

Задача 1. Определить и формализовать законы (в том числе вероятностные) искажения идеальных значений γ_{ij} ($\gamma_{ij} \geq 1$, $i \neq j$), , зависящие от параметра $\gamma_{ij}–1$, соблюдая принцип: чем больше число $\gamma_{ij}–1$, тем больше искажение.

Задача 2. Для каждого типа закона искажения идеальных значений γ_{ij} в результате статистического моделирования определить наилучшую (лучшие) модели оптимизации с взвешенными составляющими функционала; сформулировать правила определения значений взвешенных коэффициентов с учетом того, что они определяются по искаженным элементам $\gamma_{ij}*$ (взятым из эмпирической матрицы парных сравнений), и тем больше, чем меньше число $\gamma_{ij}* – 1$($\gamma_{ij}* \geq 1$, $i \neq j$).

Пример.

Имеется 40 альтернатив, истинные веса которых приведены в таблице 1. Предположим, что их веса не известны исследователю, веса альтернатив необходимо восстановить по эмпирической матрице парных сравнений, приведенной в таблицах 3-6. На практике эта матрица формируется экспертами путем проведения парных сравнений альтернатив. Но в данном примере мы сгенерировали матрицу автоматически из идеальной абсолютно согласованной матрицы (полученной с помощью весов из таблицы 1) путем вероятностного отклонения её элементов по принципу $\gamma_{ij}*=\gamma_{ij}+k_{ij}\gamma_{ij}$ со следующей особенностью: коэффициент k_{ij} распределен равномерно в интервале $(-t,t)$, где t зависит от величины истинного γ_{ij} согласно таблице 2.

Табл. 1. Веса альтернатив

№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы
1	0,05379181	11	0,04082171	21	0,02289497	31	0,01168550
2	0,05366083	12	0,03101045	22	0,02284181	32	0,00757647
3	0,05357093	13	0,03100458	23	0,01769093	33	0,00757482
4	0,05341230	14	0,03089293	24	0,01762088	34	0,00755086
5	0,05340997	15	0,03087690	25	0,01754262	35	0,00731306
6	0,04114577	16	0,03082695	26	0,01740996	36	0,00729837
7	0,04107208	17	0,03073138	27	0,01191967	37	0,00308611
8	0,04093711	18	0,03071119	28	0,01185761	38	0,00298422
9	0,04089968	19	0,02299770	29	0,01181520	39	0,00297701
10	0,04088685	20	0,02296137	30	0,01178852	40	0,00294893

Табл. 2. Значения параметра t в зависимости от значения γ_{ij}

Интервал принадлежности γ_{ij}	Значение t
1	0
(1;1,1]	0,003
(1,1;1,3]	0,009
(1,3;1,6]	0,018
(1,6;2]	0,03
(2;2,5]	0,045
(2,5;3,1]	0,063
(3,1;3,8]	0,084
(3,8;4,6]	0,108
(4,6;5,5]	0,135
(5,5;6,5]	0,165
(6,5;7,6]	0,198
(7,6;8,8]	0,234
(8,8;10,1]	0,273
(10,1; ∞)	0,315

Табл. 3. Эмпирическая матрица парных сравнений (столбцы 1-10)

№/№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1,0000	1,0055	1,0071	1,0101	1,0102	1,3364	1,3388	1,3433	1,3446	1,3450
2	0,9946	1,0000	1,0047	1,0077	1,0077	1,3331	1,3355	1,3400	1,3412	1,3417
3	0,9929	0,9953	1,0000	1,0060	1,0060	1,3309	1,3333	1,3377	1,3390	1,3394
4	0,9900	0,9924	0,9940	1,0000	1,0030	1,3125	1,3293	1,3337	1,3349	1,3354
5	0,9899	0,9923	0,9940	0,9970	1,0000	1,3124	1,3292	1,3337	1,3349	1,3353
6	0,7483	0,7501	0,7514	0,7619	0,7619	1,0000	1,0048	1,0081	1,0091	1,0094
7	0,7469	0,7488	0,7500	0,7523	0,7523	0,9952	1,0000	1,0063	1,0072	1,0076
8	0,7444	0,7463	0,7475	0,7498	0,7498	0,9919	0,9937	1,0000	1,0039	1,0042
9	0,7437	0,7456	0,7468	0,7491	0,7491	0,9910	0,9928	0,9961	1,0000	1,0033
10	0,7435	0,7453	0,7466	0,7489	0,7489	0,9907	0,9925	0,9958	0,9967	1,0000
11	0,7423	0,7441	0,7454	0,7476	0,7477	0,9891	0,9909	0,9942	0,9951	0,9954
12	0,5529	0,5543	0,5552	0,5569	0,5569	0,7371	0,7385	0,7409	0,7416	0,7419
13	0,5528	0,5541	0,5551	0,5568	0,5568	0,7370	0,7383	0,7408	0,7415	0,7417
14	0,5507	0,5521	0,5531	0,5547	0,5548	0,7343	0,7356	0,7381	0,7388	0,7390
15	0,5505	0,5518	0,5528	0,5544	0,5545	0,7339	0,7353	0,7377	0,7384	0,7386
16	0,5496	0,5509	0,5519	0,5535	0,5535	0,7327	0,7340	0,7365	0,7372	0,7374
17	0,5478	0,5492	0,5501	0,5518	0,5518	0,7304	0,7317	0,7342	0,7349	0,7351
18	0,5475	0,5488	0,5498	0,5514	0,5514	0,7299	0,7313	0,7337	0,7344	0,7346
19	0,3993	0,4003	0,4010	0,4022	0,4022	0,5358	0,5367	0,5385	0,5390	0,5392
20	0,3986	0,3996	0,4003	0,4015	0,4015	0,5349	0,5359	0,5377	0,5382	0,5384
21	0,3975	0,3985	0,3991	0,4003	0,4004	0,5333	0,5343	0,5361	0,5366	0,5368
22	0,3965	0,3975	0,3982	0,3994	0,3994	0,5321	0,5331	0,5348	0,5353	0,5355

№/№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
23	0,2976	0,2983	0,2988	0,2997	0,2997	0,4016	0,4023	0,4037	0,4040	0,4042
24	0,2964	0,2971	0,2976	0,2985	0,2985	0,4000	0,4007	0,4020	0,4024	0,4025
25	0,2950	0,2957	0,2962	0,2971	0,2972	0,3982	0,3989	0,4002	0,4006	0,4007
26	0,2927	0,2935	0,2940	0,2949	0,2949	0,3951	0,3958	0,3971	0,3975	0,3976
27	0,1859	0,1863	0,1867	0,1872	0,1872	0,2533	0,2538	0,2546	0,2549	0,2549
28	0,1849	0,1854	0,1857	0,1862	0,1862	0,2520	0,2524	0,2533	0,2535	0,2536
29	0,1842	0,1847	0,1850	0,1856	0,1856	0,2510	0,2515	0,2523	0,2526	0,2527
30	0,1838	0,1843	0,1846	0,1851	0,1851	0,2505	0,2509	0,2518	0,2520	0,2521
31	0,1751	0,1826	0,1829	0,1835	0,1835	0,2482	0,2487	0,2495	0,2497	0,2498
32	0,1030	0,1032	0,1034	0,1037	0,1037	0,1479	0,1482	0,1487	0,1488	0,1488
33	0,1029	0,1032	0,1034	0,1037	0,1037	0,1479	0,1481	0,1486	0,1488	0,1488
34	0,1026	0,1029	0,1030	0,1033	0,1033	0,1474	0,1476	0,1481	0,1483	0,1483
35	0,0993	0,0995	0,0997	0,1000	0,1000	0,1366	0,1369	0,1374	0,1375	0,1375
36	0,0991	0,0993	0,0995	0,0998	0,0998	0,1364	0,1366	0,1371	0,1372	0,1373
37	0,0356	0,0357	0,0357	0,0358	0,0358	0,0467	0,0468	0,0469	0,0470	0,0470
38	0,0344	0,0345	0,0345	0,0347	0,0347	0,0451	0,0452	0,0454	0,0454	0,0454
39	0,0343	0,0344	0,0345	0,0346	0,0346	0,0450	0,0451	0,0453	0,0453	0,0453
40	0,0340	0,0341	0,0341	0,0342	0,0342	0,0446	0,0447	0,0448	0,0449	0,0449

Табл. 4. Эмпирическая матрица парных сравнений (столбцы 11-20)

№/№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1,3472	1,8087	1,8091	1,8157	1,8167	1,8197	1,8254	1,8266	2,5045	2,5086
2	1,3438	1,8042	1,8046	1,8112	1,8122	1,8152	1,8209	1,8221	2,4983	2,5023
3	1,3416	1,8012	1,8015	1,8081	1,8091	1,8121	1,8178	1,8190	2,4940	2,4981
4	1,3375	1,7957	1,7961	1,8027	1,8036	1,8066	1,8123	1,8135	2,4865	2,4905
5	1,3375	1,7957	1,7960	1,8026	1,8036	1,8065	1,8122	1,8135	2,4864	2,4904
6	1,0110	1,3566	1,3569	1,3618	1,3625	1,3648	1,3691	1,3700	1,8665	1,8695
7	1,0092	1,3541	1,3544	1,3594	1,3601	1,3623	1,3666	1,3675	1,8631	1,8661
8	1,0058	1,3496	1,3499	1,3548	1,3555	1,3578	1,3621	1,3630	1,8569	1,8598
9	1,0049	1,3484	1,3486	1,3536	1,3543	1,3565	1,3608	1,3617	1,8551	1,8581
10	1,0046	1,3480	1,3482	1,3531	1,3539	1,3561	1,3604	1,3613	1,8545	1,8575
11	1,0000	1,3458	1,3460	1,3510	1,3517	1,3539	1,3582	1,3591	1,8515	1,8545
12	0,7431	1,0000	1,0032	1,0068	1,0074	1,0090	1,0121	1,0128	1,3790	1,3812
13	0,7429	0,9968	1,0000	1,0066	1,0072	1,0088	1,0119	1,0126	1,3787	1,3809
14	0,7402	0,9932	0,9934	1,0000	1,0035	1,0052	1,0083	1,0090	1,3737	1,3759
15	0,7398	0,9927	0,9929	0,9965	1,0000	1,0046	1,0078	1,0084	1,3729	1,3751
16	0,7386	0,9911	0,9913	0,9949	0,9954	1,0000	1,0061	1,0068	1,3707	1,3729
17	0,7363	0,9880	0,9882	0,9918	0,9923	0,9939	1,0000	1,0037	1,3664	1,3686
18	0,7358	0,9874	0,9875	0,9911	0,9916	0,9933	0,9964	1,0000	1,3655	1,3677
19	0,5401	0,7252	0,7253	0,7280	0,7284	0,7296	0,7319	0,7323	1,0000	1,0046
20	0,5392	0,7240	0,7242	0,7268	0,7272	0,7284	0,7307	0,7312	0,9954	1,0000
21	0,5376	0,7219	0,7220	0,7247	0,7251	0,7263	0,7285	0,7290	0,9925	0,9941
22	0,5364	0,7202	0,7203	0,7230	0,7234	0,7245	0,7268	0,7273	0,9902	0,9918
23	0,4048	0,5470	0,5471	0,5491	0,5494	0,5503	0,5521	0,5524	0,7608	0,7620
24	0,4032	0,5448	0,5449	0,5469	0,5472	0,5481	0,5499	0,5502	0,7496	0,7508
25	0,4014	0,5424	0,5425	0,5445	0,5447	0,5456	0,5474	0,5477	0,7462	0,7474
26	0,3983	0,5382	0,5383	0,5403	0,5406	0,5415	0,5432	0,5435	0,7405	0,7417
27	0,2554	0,3489	0,3489	0,3502	0,3504	0,3510	0,3521	0,3523	0,4962	0,4970
28	0,2540	0,3470	0,3471	0,3484	0,3485	0,3491	0,3502	0,3505	0,4936	0,4944
29	0,2531	0,3457	0,3458	0,3471	0,3473	0,3478	0,3490	0,3492	0,4918	0,4926
30	0,2525	0,3449	0,3450	0,3463	0,3465	0,3470	0,3481	0,3484	0,4907	0,4915
31	0,2502	0,3419	0,3419	0,3432	0,3434	0,3439	0,3450	0,3453	0,4863	0,4871
32	0,1491	0,2054	0,2054	0,2062	0,2063	0,2066	0,2073	0,2074	0,2981	0,2986
33	0,1490	0,2053	0,2054	0,2061	0,2062	0,2066	0,2072	0,2074	0,2980	0,2985
34	0,1486	0,2047	0,2047	0,2055	0,2056	0,2059	0,2066	0,2067	0,2970	0,2975
35	0,1378	0,1981	0,1981	0,1989	0,1990	0,1993	0,1999	0,2001	0,2786	0,2791
36	0,1375	0,1977	0,1977	0,1984	0,1986	0,1989	0,1995	0,1996	0,2781	0,2785
37	0,0471	0,0655	0,0655	0,0658	0,0658	0,0659	0,0661	0,0662	0,0980	0,0981
38	0,0455	0,0602	0,0602	0,0604	0,0604	0,0605	0,0607	0,0608	0,0903	0,0904

№/№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
39	0,0454	0,0600	0,0600	0,0602	0,0603	0,0604	0,0606	0,0606	0,0900	0,0902
40	0,0449	0,0594	0,0594	0,0597	0,0597	0,0598	0,0600	0,0600	0,0892	0,0893

Табл. 5. Эмпирическая матрица парных сравнений (столбцы 21-30)

№/№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2,5160	2,5219	3,3608	3,3744	3,3897	3,4160	5,3796	5,4084	5,4282	5,4407
2	2,5097	2,5157	3,3524	3,3660	3,3813	3,4075	5,3663	5,3949	5,4147	5,4272
3	2,5054	2,5114	3,3467	3,3603	3,3755	3,4017	5,3571	5,3857	5,4054	5,4179
4	2,4979	2,5038	3,3366	3,3501	3,3654	3,3915	5,3409	5,3694	5,3891	5,4015
5	2,4978	2,5037	3,3365	3,3500	3,3652	3,3913	5,3407	5,3692	5,3889	5,4013
6	1,8750	1,8794	2,4901	2,5002	2,5116	2,5310	3,9478	3,9689	3,9835	3,9927
7	1,8716	1,8760	2,4856	2,4957	2,5070	2,5264	3,9406	3,9617	3,9762	3,9854
8	1,8653	1,8697	2,4773	2,4873	2,4986	2,5180	3,9274	3,9484	3,9629	3,9720
9	1,8636	1,8680	2,4750	2,4850	2,4963	2,5156	3,9237	3,9447	3,9592	3,9683
10	1,8630	1,8674	2,4742	2,4842	2,4955	2,5148	3,9225	3,9434	3,9579	3,9670
11	1,8600	1,8644	2,4702	2,4802	2,4914	2,5108	3,9161	3,9370	3,9515	3,9606
12	1,3852	1,3885	1,8281	1,8355	1,8438	1,8581	2,8664	2,8818	2,8923	2,8990
13	1,3850	1,3882	1,8277	1,8351	1,8434	1,8577	2,8659	2,8812	2,8918	2,8985
14	1,3799	1,3832	1,8210	1,8284	1,8367	1,8509	2,8553	2,8706	2,8811	2,8878
15	1,3792	1,3824	1,8201	1,8274	1,8357	1,8499	2,8538	2,8691	2,8796	2,8863
16	1,3769	1,3802	1,8171	1,8244	1,8327	1,8469	2,8491	2,8643	2,8748	2,8815
17	1,3726	1,3758	1,8114	1,8187	1,8269	1,8411	2,8401	2,8553	2,8657	2,8724
18	1,3717	1,3749	1,8101	1,8175	1,8257	1,8398	2,8382	2,8533	2,8638	2,8704
19	1,0075	1,0099	1,3144	1,3341	1,3402	1,3505	2,0152	2,0259	2,0332	2,0379
20	1,0059	1,0083	1,3123	1,3320	1,3380	1,3483	2,0119	2,0226	2,0300	2,0346
21	1,0000	1,0053	1,3085	1,3137	1,3341	1,3444	2,0060	2,0167	2,0240	2,0287
22	0,9947	1,0000	1,3054	1,3106	1,3310	1,3412	2,0013	2,0119	2,0193	2,0239
23	0,7643	0,7660	1,0000	1,0070	1,0115	1,0192	1,5196	1,5277	1,5332	1,5367
24	0,7612	0,7630	0,9930	1,0000	1,0075	1,0152	1,5135	1,5215	1,5271	1,5306
25	0,7496	0,7513	0,9886	0,9926	1,0000	1,0107	1,5067	1,5147	1,5202	1,5237
26	0,7438	0,7456	0,9811	0,9850	0,9894	1,0000	1,4952	1,5031	1,5086	1,5120
27	0,4985	0,4997	0,6581	0,6607	0,6637	0,6688	1,0000	1,0083	1,0119	1,0142
28	0,4959	0,4970	0,6546	0,6572	0,6602	0,6653	0,9918	1,0000	1,0066	1,0089
29	0,4941	0,4952	0,6522	0,6549	0,6578	0,6629	0,9882	0,9934	1,0000	1,0053
30	0,4929	0,4941	0,6507	0,6534	0,6563	0,6614	0,9860	0,9912	0,9948	1,0000
31	0,4886	0,4897	0,6450	0,6476	0,6505	0,6555	0,9774	0,9825	0,9860	0,9883
32	0,2994	0,3001	0,4000	0,4016	0,4034	0,4066	0,6204	0,6237	0,6259	0,6274
33	0,2994	0,3001	0,3999	0,4015	0,4033	0,4065	0,6203	0,6235	0,6258	0,6272
34	0,2984	0,2991	0,3986	0,4002	0,4020	0,4052	0,6183	0,6215	0,6238	0,6252
35	0,2799	0,2806	0,3858	0,3874	0,3892	0,3922	0,5890	0,5922	0,5943	0,5957
36	0,2793	0,2800	0,3850	0,3866	0,3884	0,3914	0,5878	0,5910	0,5931	0,5945
37	0,0984	0,0987	0,1341	0,1346	0,1352	0,1363	0,2179	0,2191	0,2199	0,2204
38	0,0907	0,0909	0,1295	0,1301	0,1307	0,1317	0,2106	0,2117	0,2125	0,2130
39	0,0905	0,0907	0,1292	0,1297	0,1303	0,1314	0,2101	0,2112	0,2120	0,2124
40	0,0896	0,0898	0,1280	0,1285	0,1291	0,1301	0,2080	0,2091	0,2099	0,2104

Табл. 6. Эмпирическая матрица парных сравнений (столбцы 31-40)

№/№	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	5,7112	9,7134	9,7155	9,7470	10,0704	10,0911	28,0964	29,0664	29,1376	29,4180
2	5,4760	9,6893	9,6914	9,7228	10,0454	10,0660	28,0272	28,9949	29,0659	29,3456
3	5,4666	9,6727	9,6748	9,7062	10,0282	10,0488	27,9797	28,9458	29,0167	29,2959
4	5,4501	9,6435	9,6456	9,6768	9,9979	10,0185	27,8959	28,8591	28,9298	29,2082
5	5,4499	9,6430	9,6452	9,6764	9,9975	10,0180	27,8947	28,8579	28,9286	29,2069
6	4,0286	6,7620	6,7635	6,7854	7,3180	7,3331	21,4171	22,1591	22,2135	22,4280
7	4,0213	6,7497	6,7512	6,7730	7,3046	7,3197	21,3782	22,1188	22,1732	22,3873
8	4,0078	6,7271	6,7285	6,7503	7,2801	7,2951	21,3069	22,0451	22,0993	22,3127
9	4,0040	6,7208	6,7223	6,7440	7,2733	7,2882	21,2871	22,0247	22,0788	22,2920
10	4,0028	6,7186	6,7201	6,7419	7,2709	7,2859	21,2803	22,0177	22,0718	22,2849
11	3,9962	6,7077	6,7092	6,7309	7,2591	7,2740	21,2459	21,9821	22,0361	22,2489

№/№	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
12	2,9251	4,8691	4,8702	4,8860	5,0483	5,0587	15,2618	16,6231	16,6642	16,8258
13	2,9246	4,8681	4,8692	4,8850	5,0474	5,0578	15,2589	16,6199	16,6609	16,8225
14	2,9138	4,8502	4,8513	4,8670	5,0288	5,0391	15,2029	16,5589	16,5998	16,7608
15	2,9123	4,8476	4,8487	4,8645	5,0261	5,0365	15,1949	16,5502	16,5910	16,7520
16	2,9074	4,8396	4,8407	4,8564	5,0178	5,0282	15,1699	16,5229	16,5637	16,7244
17	2,8982	4,8243	4,8254	4,8410	5,0019	5,0122	15,1220	16,4707	16,5114	16,6715
18	2,8963	4,8211	4,8221	4,8378	4,9986	5,0089	15,1119	16,4597	16,5003	16,6604
19	2,0561	3,3549	3,3556	3,3665	3,5891	3,5965	10,2050	11,0791	11,1065	11,2144
20	2,0528	3,3495	3,3502	3,3610	3,5833	3,5906	10,1886	11,0612	11,0885	11,1963
21	2,0468	3,3396	3,3403	3,3511	3,5727	3,5800	10,1585	11,0285	11,0558	11,1633
22	2,0420	3,3317	3,3324	3,3432	3,5642	3,5715	10,1345	11,0024	11,0296	11,1368
23	1,5504	2,5001	2,5007	2,5088	2,5918	2,5971	7,4591	7,7195	7,7386	7,8138
24	1,5442	2,4901	2,4906	2,4987	2,5814	2,5867	7,4289	7,6882	7,7073	7,7822
25	1,5373	2,4788	2,4793	2,4874	2,5697	2,5750	7,3952	7,6534	7,6723	7,7469
26	1,5255	2,4597	2,4603	2,4682	2,5499	2,5552	7,3381	7,5942	7,6130	7,6871
27	1,0232	1,6119	1,6122	1,6174	1,6977	1,7012	4,5886	4,7490	4,7608	4,8071
28	1,0178	1,6034	1,6038	1,6089	1,6887	1,6922	4,5642	4,7237	4,7354	4,7815
29	1,0142	1,5976	1,5980	1,6031	1,6826	1,6860	4,5475	4,7064	4,7181	4,7640
30	1,0119	1,5940	1,5943	1,5994	1,6787	1,6821	4,5370	4,6955	4,7072	4,7530
31	1,0000	1,5799	1,5802	1,5853	1,6374	1,6672	4,3386	4,6536	4,6651	4,7105
32	0,6330	1,0000	1,0032	1,0064	1,0392	1,0413	2,6310	2,7957	2,8027	2,8299
33	0,6328	0,9968	1,0000	1,0062	1,0390	1,0411	2,6304	2,7951	2,8020	2,8293
34	0,6308	0,9936	0,9938	1,0000	1,0357	1,0378	2,6219	2,7861	2,7930	2,8202
35	0,6107	0,9622	0,9625	0,9655	1,0000	1,0050	2,5379	2,6261	2,6326	2,6581
36	0,5998	0,9603	0,9605	0,9636	0,9950	1,0000	2,5328	2,6208	2,6272	2,6527
37	0,2305	0,3801	0,3802	0,3814	0,3940	0,3948	1,0000	1,0373	1,0399	1,0498
38	0,2149	0,3577	0,3578	0,3589	0,3808	0,3816	0,9640	1,0000	1,0054	1,0150
39	0,2144	0,3568	0,3569	0,3580	0,3799	0,3806	0,9617	0,9946	1,0000	1,0126
40	0,2123	0,3534	0,3534	0,3546	0,3762	0,3770	0,9526	0,9852	0,9876	1,0000

Для восстановления весов альтернатив по плохо согласованной матрице парных сравнений воспользуемся следующими модификациями моделей 2 из [3] и модели из [4]:

Модифицированная модель 2 [3]

Модель представляет собой следующую задачу линейного программирования:

$$\min \sum\sum_{(ij)\in|A|} r_{ij} y_{ij} \tag{1}$$

$$-y_{ij} \le \omega_i - \gamma^*_{ij}\omega_j \le y_{ij}, \quad y_{ij} \ge 0 \qquad (i,j)\in|A|$$

$$a \le \omega_i, \quad i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где α – заданное положительное число, $\alpha \ge 1$; $\omega_i, i=\overline{1,n}, \quad y_{ij}, \forall (i,j)\in A$ – переменные задачи линейного программирования; r_{ij} – заданные весовые коэффициенты.

Модифицированная модель [4]

Представляет собой последовательность задач линейного программирования:

$$\min_{\substack{\Delta^1_{ij},\Delta^2_{ij} \\ \forall (ij)\in|A|}} \Big(\sum_{(ij)\in|A|}\sum r_{ij}\Delta^1_{ij} - C_{lm}\sum_{(ij)\in|A|}\sum r_{ij}\Delta^2_{ij} \Big) \tag{3}$$

$$\ln\gamma^*_{ij} + \Delta^2_{ij} \le W_i - W_j \le \ln\gamma^*_{ij} + \Delta^1_{ij},$$

$$0 \le \Delta^1_{ij} \le \ln(1 + l\Delta_1(l)), \quad 0 \ge \Delta^2_{ij} \ge \ln(1 - m\Delta_2(m)), \tag{4}$$

$$W_i \ge 0, \quad i=\overline{1,n},$$

где $W_{ij}, \Delta^1_{ij}, \Delta^2_{ij}$ – переменные задачи линейного программирования; l,m – натуральные числа, последовательно принимающие значения (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2) и т. д.; $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ – заданные числовые скалярные функции натурального аргумента, принимающие неотрицательные значения; C_{lm} – коэффициент, определяющийся из отношения:

$$\ln(1 + l\cdot\Delta_1(l)) = C_{lm}\ln\frac{1}{\left(1 - m\cdot\Delta_2(m)\right)};$$

r_{ij} – заданные весовые коэффициенты.

При использовании задач (3)-(4) для поиска весов функции $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ задаются таким образом, что значения $l\cdot\Delta_1(l)$ и $m\cdot\Delta_2(m)$ на каждой итерации (при каждой попытке решения задачи линейного программирования (3)-(4)) возрастают в небольшом соотношении к их предыдущему значению, а на первой итерации принимают минимально возможные значения. Итерации прекращаются при первом успешном решении задачи линейного программирования (3)-(4). После этого веса $\omega_i^*, i=\overline{1,n}$ объектов находятся из соотношения $\omega_i^* = e^{W_i^*}, i=\overline{1,n}$.

В функционалах (1) и (3) были добавлены весовые коэффициенты r_{ij}, значения которых задавались согласно таблице 7. Такой способ задания коэффициентов r_{ij} соответствует особенностям эмпирической матрицы парных сравнений, элементы γ_{ij}* которой тем больше «зашумлены», чем больше значение $|\gamma_{ij}-1|$ (γ_{ij} – идеальное значение эмпирического коэффициента). Набор значений r_{ij} в таблице не является единственно возможным и оптимальным для данного примера, однако, как будет показано далее, позволяет получить решение намного эффективнее, чем решение, полученное с помощью классического метода. Поиск эффективного варианта задания весовых коэффициентов r_{ij} является следующей задачей статистического моделирования: необходимо для максимально широких допусков изменения параметров, определяющих статистический закон (статистические законы) искажения идеальных значений коэффициентов γ_{ij} как функции параметра $|\gamma_{ij}-1|$, с помощью статистического моделирования определить усредненные значения весов r_{ij} как функцию параметра $|\gamma_{ij}^*-1|$ (не нарушая общности, можно работать только с $\gamma_{ij}^*\geq 1$; γ_{ij}^* – элемент эмпирической матрицы парных сравнений, то есть искаженное значение коэффициента γ_{ij}). При этом необходимо предусмотреть методику опроса экспертов, позволяющую определить для каждого конкретного случая соответствующий диапазон изменения определенных выше параметров.

Табл. 7. Значения весовых коэффициентов r_{ij} в зависимости от γ_{ij}*

Интервал принадлежности γ_{ij}*	**Значение r_{ij}**
1	1000,000
(1;1,1]	250,000
(1,1;1,3]	100,000
(1,3;1,6]	52,632
(1,6;2]	32,258
(2;2,5]	21,739
(2,5;3,1]	15,625
(3,1;3,8]	11,765
(3,8;4,6]	9,174
(4,6;5,5]	7,353
(5,5;6,5]	6,024
(6,5;7,6]	5,025
(7,6;8,8]	4,255
(8,8;10,1]	3,650
(10,1;∞)	3,165

Веса, найденные с помощью модифицированной модели 2 [3] (2)-(3), приведены в таблице 8. Угловое расстояние d для найденного набора составляет 0,03395.

Табл. 8. Веса альтернатив, найденные с помощью модифицированной модели 2 [3]

№	**Вес альтернативы**	**№**	**Вес альтернативы**	**№**	**Вес альтернативы**	**№**	**Вес альтернативы**
1	0,03432438	11	0,02540454	21	0,01362760	31	0,00645089
2	0,03423995	12	0,01893249	22	0,01358675	32	0,00390892
3	0,03410050	13	0,01892862	23	0,01031444	33	0,00389652
4	0,03397955	14	0,01885955	24	0,01027286	34	0,00388402
5	0,03397747	15	0,01883784	25	0,01019712	35	0,00375023
6	0,02568419	16	0,01876416	26	0,01011917	36	0,00374254
7	0,02563750	17	0,01870522	27	0,00660095	37	0,00128182
8	0,02555155	18	0,01869276	28	0,00656583	38	0,00123567
9	0,02545385	19	0,01372079	29	0,00652721	39	0,00123567
10	0,02544574	20	0,01369876	30	0,00650858	40	0,00123567

Веса, найденные с помощью модифицированной модели из [4], приведены в таблице 9 (имеется в виду первое полученное оптимальное решение задачи линейного программирования (3)-(4)). Угловое расстояние d для найденного набора составляет 0,02941.

Табл. 9. Веса альтернатив, найденные с помощью модифицированной модели [4]

№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы
1	0,05615910	11	0,04161281	21	0,02232223	31	0,01083834
2	0,05602195	12	0,03101129	22	0,02226921	32	0,00676883
3	0,05585637	13	0,03100534	23	0,01692297	33	0,00676735
4	0,05559492	14	0,03089221	24	0,01684726	34	0,00674554
5	0,05559250	15	0,03084095	25	0,01673181	35	0,00651328
6	0,04206997	16	0,03073600	26	0,01660359	36	0,00650016
7	0,04199362	17	0,03063946	27	0,01108935	37	0,00242244
8	0,04180634	18	0,03061922	28	0,01103145	38	0,00234223
9	0,04169403	19	0,02248891	29	0,01095936	39	0,00232957
10	0,04167940	20	0,02243891	30	0,01093418	40	0,00230753

Веса, найденные с помощью классического метода (поиск весов как элементов собственного вектора матрицы парных сравнений, отвечающего максимальному собственному числу), приведены в таблице 10. Угловое расстояние d для найденного набора составляет 0,04390.

Табл. 10. Веса альтернатив, найденные с помощью классического метода

№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы
1	0,05726581	11	0,04208118	21	0,02204579	31	0,01033667
2	0,05705924	12	0,03109608	22	0,02199056	32	0,00627693
3	0,05695368	13	0,03108544	23	0,01652470	33	0,00627460
4	0,05675853	14	0,03096720	24	0,01644686	34	0,00625348
5	0,05674753	15	0,03094626	25	0,01636132	35	0,00597320
6	0,04247502	16	0,03089083	26	0,01623327	36	0,00595771
7	0,04236842	17	0,03078902	27	0,01057770	37	0,00214060
8	0,04222084	18	0,03076389	28	0,01052014	38	0,00203433
9	0,04217536	19	0,02215886	29	0,01048032	39	0,00202903
10	0,04215562	20	0,02212002	30	0,01045470	40	0,00200928

Таким образом, с помощью модифицированных моделей 2 из [3] и модифицированной модели из [4] нашли веса более эффективные по мере d, чем веса, найденные с помощью классического метода. Во всех найденных наборах победитель определен корректно – альтернатива под номером 1.

Статистические исследования показали рост эффективности данных методов по сравнению с классическим при увеличении количества альтернатив (полученное значение меры d при использовании этих моделей в среднем в 3-4 раза меньше, чем при использовании классического метода при количестве альтернатив 70). Следует отметить, что во всех проведенных экспериментах при одинаковом способе задания коэффициентов r_{ij} модифицированная модель из [4] давала более точное решение по мере d, чем модифицированная модель 2 из [3], но вследствие сложности модели из [4] на нахождение весов с её помощью времени требовалось в несколько раз больше, чем при использовании модели 2 из [3]. Можно сделать вывод, что использование в этом случае на практике модели из [4] вместо модели 2 из [3] обоснованно только тогда, когда точности восстановленных с помощью модели 2 из [3] весов не достаточно.

1.2 ММАИ (вторая версия).

Искажение γ_{ij} зависит от двух факторов: размерности эмпирической матрицы парных сравнений и величины значения γ_{ij} –1. Такое сочетание факторов искажения может иметь место, когда эксперт (эксперты) поэтапно блоками размерностью от 7×7 до 9×9 заполняют эмпирическую матрицу парных сравнений и ошибаются тем больше, чем из большего числа альтернатив выбираются произвольные 7÷9 альтернатив для парных сравнений.

ММАИ (вторая версия) реализуется в несколько этапов.

Этап 1.

По исходной эмпирической матрице парных сравнений с использованием моделей оптимизации, определенных при описании ММАИ (третья версия), находятся оценки весов $\hat{\omega}_i$ альтернатив $A_i, i=\overline{1,m}$.

Альтернативы упорядочиваются в соответствии с убыванием значений $\hat{\omega}_i$, $i=\overline{1,m}$.

Этап 2.

Выбираются наилучшие m_2 ($m_2 \le 15$) альтернативы и для них эксперту (экспертам) предлагается заново построить эмпирическую матрицу парных сравнений.

Примечание. В известной авторам литературе число 15 – максимальное встречающееся число альтернатив, которое позволяет корректно решить практическую задачу выбора наилучшей альтернативы с помощью классического МАИ.

Далее для вновь построенной матрицы парных сравнений повторяется Этап 1.

Этап 3.

Для m_3 ($m_3 \le 7 \div 9$) лучших альтернатив, определенных на Этапе 2 вновь экспертом (экспертами) определяется матрица парных сравнений. По этой матрице с помощью моделей оптимизации, определенных при описании ММАИ (третья версия), оцениваются веса альтернатив. Лучшей является альтернатива с наибольшим весом.

Задача статистически значимо решена правильно, если на этапе 3 эмпирическая матрица парных сравнений оказалась хорошо согласованной.

Для эффективного применения ММАИ второй версии должны быть решены задачи, аналогичные задачам 1, 2 ММАИ третьей версии.

Примечание. При использовании модифицированных моделей оптимизации (в частности 2 из [3] и модели из [4]) оценки весов по угловой мере могут быть допустимо близки к идеальным и при плохо обусловленной эмпирической матрице парных сравнений, когда число $\lambda^* - m$ является больше допустимого ($m \times m$ – размерность эмпирической матрицы парных сравнений, а λ^* ее максимальное положительное собственное число). Тогда критерием произвольного решения задачи может быть статистический модифицированный критерий M_1 [3], в котором каждое слагаемое, определяемое $\gamma_{ij}^* \ge 1$ будет умножаться не на постоянный коэффициент, а на коэффициент зависящий от величины $\gamma_{ij}^* - 1$ (чем меньше $\gamma_{ij}^* - 1$, тем он больше).

Верхние границы допустимого значения модифицированного критерия находятся в результате статистического моделирования при заданных параметрических вероятностных законах искажения идеальных значений γ_{ij}. Результаты моделирования должны быть заданы в виде соответствующих таблиц, где верхние границы допустимого значения модифицированного критерия M_1 определяются параметрическим вероятностным законом, значения параметров которого находятся в заданных интервалах. Для эффективного использования этих таблиц (аналога определения хорошо согласованных эмпирических матриц парных сравнений) необходимо экспертным путем определить тип параметрического вероятностного распределения и верхние границы значений его параметров, определяющих его наиболее «жесткий» вариант.

2. Модифицированный метод анализа иерархий (общий случай)

Рассмотрим дерево иерархий.

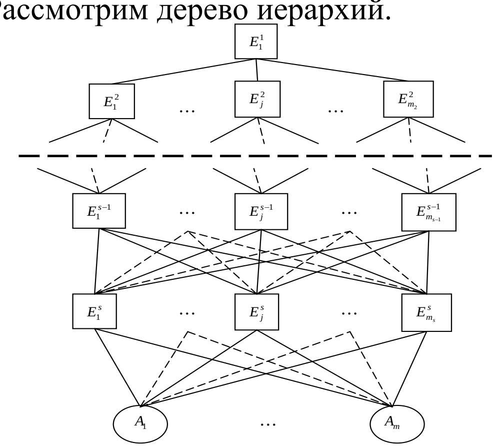

Рис. 2. Дерево иерархии Саати

Построение дерева иерархий [6], нахождение всех весов в виде $\omega_{E_t^{s-j}}^{E_e^{s-j+1}}$ реализуется в соответствии с общепризнанными требованиями к методу анализа иерархий [7-9]. Модификация метода относится к алгоритмам нахождения весов $E_j^s(A_i) = \omega_{E_j^s}^i, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,m}$, для случая, когда число альтернатив достаточно велико. Рассмотрим адаптацию версий ММАИ, веденных для двухуровневой структуры.

В этом случае на нижнем уровне имеем m_s эмпирических матриц парных сравнений, каждая из которых соответствует одному из критериев нижнего уровня $E_j^s, j = \overline{1,m_s}$. По каждой j-той ($j = \overline{1,m_s}$) эмпирической матрице парных сравнений необходимо найти веса $E_j^s(A_i), i = \overline{1,m}$, которые используются для нахождения результирующих весов $\omega_1^1(A_i), i = \overline{1,m}$, максимальный из которых определяет наилучшую альтернативу.

Обобщение всех версий ММАИ на общий случай является очевидным: в каждой версии модели оптимизации строятся не по одной эмпирической матрице парных сравнений, а по каждой из эмпирических матриц парных сравнений.

При этом необходимо учесть следующее:

1. Для всех модификаций ММАИ на каждом этапе должна быть проведена соответствующая нормировка оценок весов по каждой эмпирической матрице парных сравнений.
2. Статистическая эффективность ММАИ всех модификаций для общего случая в целом ниже, чем для двухуровневой структуры, поскольку сказывается эффект наложения ошибок определения весов по всем эмпирическим матрицам парных сравнений.
3. ММАИ (вторая версия), эффективно решает задачу, если единая наилучшая альтернатива A_i при реализации второго этапа оказалась в числе первых m_3 альтернатив, а на третьем этапе дерево иерархии оказалось интегрально хорошо согласованным (с эмпирическими матрицами парных сравнений размерности $m_3 \times m_3$ на s-том уровне иерархии).
4. Должна быть создана методика экспертного опроса, позволяющая обоснованно определить закон (законы) искажения эмпирических γ_{ij} (элементов эмпирической матрицы парных сравнений), что позволит эффективно использовать ММАИ соответствующих модификаций.
5. Формальная модель каждой эмпирической матрицы парных сравнений последнего уровня иерархии с точностью до задания параметрического вероятностного распределения искажения ее элементов является одной и той же.

Выводы

В данной статье были предложены модификации МАИ для двух случаев:

1) Искажение идеальных значений γ_{ij} элементов эмпирической матрицы парных сравнений γ_{ij}* не зависит от ее размеров. Искажение γ_{ij}* истинного значения γ_{ij} ($\forall \gamma_{ij} \geq 1, i \neq j$) тем больше, чем больше γ_{ij} отличается от единицы.

2) Искажение γ_{ij} зависит от двух факторов: размерности эмпирической матрицы парных сравнений и величины значения $\gamma_{ij} - 1$.

Модификации МАИ приведены для двухуровневой иерархии, затем полученные результаты адаптированы для общего случая.

В статье приведены результаты статистических исследований, доказывающих эффективность данных модификаций по сравнению с классическим МАИ.

Список литературы

1. Павлов А.А., Кут В.И. Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов объектов по неоднородным матрицам парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології. №3, 2007р.
2. Павлов А.А., Кут В.И., Штанькевич А.С. Нахождение весов по матрице парных сравнений с односторонними ограничениями. Вісник НТУУ „КПІ" Інформатика, управління та обчислювальна техніка, Київ 2008р. №48.-122 с. – С.29-32.
3. Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И. Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов в методе парных сравнений" Системні дослідження та інформаційні технології. №2, 2007р.
4. Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.Н. Многокритериальный выбор в задаче обработки данных матрицы парных сравнений. Вісник НТУУ „КПІ" Інформатика, управління та обчислювальна техніка, Київ 2007р. №46.
5. Згуровский М.З., Павлов А.А., Штанкевич А.С. Модифицированный метод анализа иерархий. Інформаційні дослідження та інформаційні технології. №2. 2010 р. (принято к печати).
6. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике.-Москва: Финансы и статистика.-2001.
7. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Tomas Saaty. The Analytic Hierarchy Process. –Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. – М.: Радио и связь, 1993. – 315 с.
8. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе: Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1991. – 223 с.
9. Saaty T.L. Multicriteria Detcision Making. The Analytik Hierarchy Process,.-New York:McGraw Hill International,1990.p.437.

Поступила в редакцию 30.11.2009