УДК 004.032

СЕРАЯ О.В.,
КАТКОВА Т.И.,
ФИЩУКОВА Н.В.

НЕЧЕТКАЯ БАЙЕСОВА ЭКСПЕРТНАЯ СИСТЕМА

Предложена методика расчета функций принадлежности апостериорных вероятностей состояний контролируемого объекта для нечеткой байесовой экспертной системы.

The calculation method of membership functions of a posteriori probabilities of the states of the controlled object is offered for fuzzy Bayes expert system.

Постановка проблемы, анализ последних публикаций

Экспертные системы (ЭС) – один из наиболее эффективных инструментов оценивания состояния контролируемых объектов. Такая система преобразует набор измеренных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ контролируемых параметров объекта в значение y – параметра, оценивающего состояние этого объекта. Если при этом механизм логического вывода системы – продукционный, то процедура преобразования сводится к применению совокупности правил вида

$$\begin{array}{ll} \text{ЕСЛИ} & x_1 \ \text{это} \ A_1, \\ & x_2 \ \text{это} \ A_2, \\ & \text{.................}, \\ & x_n \ \text{это} \ A_n, \\ \text{ТО} & y \ \text{это} \ B. \end{array} \tag{1}$$

Продукционные системы очень удобны для использования, поскольку логика вывода в такой системе аналогична той, какую использует в подобной ситуации человек. Точность оценивания состояния в такой системе может быть сделана как угодно высокой и ограничивается только числом контролируемых параметров, точностью их измерения и правильностью заключений, образующих правила (1). Неопределенность, неизбежно сопровождающая все этапы процедуры оценивания состояния объектов с использованием ЭС, приводит к появлению и все более широкому использованию нечетких ЭС. Одной из наиболее известных таких систем является система нечеткого вывода Мамдани – Заде [1]. Применительно к задаче оценки состояния объекта эта система работает следующим образом. Для каждого из возможных состояний объекта $S_1, S_2, ..., S_p$ формируются функции принадлежности контролируемых параметров $\mu^{(k)}(x_j)$, $k = 1,2,...,p$, $j = 1,2,...,n$, диапазону возможных своих значений, определяемому состоянием. В соответствии с этим при получении конкретного набора измеренных значений параметров $X^{(0)} = \{x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\}$ осуществляется вычисление значений функций принадлежности $\mu^{(k)}(X_j^{(0)})$, $k = 1,2,...,p$, $j = 1,2,...,n$. Далее значения функций принадлежности, относящихся к каждому из состояний, агрегируются (чаще всего с использованием операции логического суммирования). При этом получают

$$\begin{aligned} &\mu^{(k)}(X^{(0)}) = \\ &= max\{\mu^{(k)}(x_1^{(0)}), \mu^{(k)}(x_2^{(0)}), \\ &..., \mu^{(k)}(x_n^{(0)})\}, \ k = 1,2,...,p. \end{aligned} \tag{2}$$

Завершающей является операция дефуззификации выполняемая, например, следующим образом:

$$\hat{k} = \frac{\sum_{k=1}^{p} \mu^{(k)}(x^{(0)}) \cdot k}{\sum_{k=1}^{p} \mu^{(k)}(x^{(0)})}. \tag{3}$$

Недостатки описанной процедуры достаточно очевидны: снижение точности диагностики состояния за счет агрегирования, а также неоднозначность трактовки результата операции дефуззификации.

Другой подход, не требующий дефуззификации, реализован в модели нечеткого вывода Такаги-Сугено [2]. В этой модели для каждого из возможных состояний объекта рассчитывается уравнение регрессии

$$y_k = a_{k_0} + a_{k_1} x_1 + a_{k_2} x_2 + ... + a_{k_n} x_n, \quad k = 1,2,...,p, \tag{4}$$

связывающее некоторый результирующий параметр y с результатами непосредственных измерений параметров $x_1, x_2, ..., x_n$. При этом коэффициенты (a_{k_j}) в (4) оцениваются статистически. С другой стороны, тот же что и в модели Мамдани – Заде набор функций принадлежности $\mu^{(k)}(x_j)$ используется для формирования весовых коэффициентов W_k, $k = 1,2,...,p$, по правилу

$$W_k = min\{\mu^{(k)}(x_j)\}, \quad k = 1,2,...,p. \qquad (5)$$

Теперь с учетом этих коэффициентов рассчитывается оценка состояния объекта

$$\hat{k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{W_k}{\sum_{k=1}^{p} W_k} \cdot y_k. \qquad (6)$$

Слабые звенья этой процедуры: необоснованный выбор структуры уравнения регрессии (4) и использование операции логического умножения (5) при расчете весовых коэффициентов.

Принципиально другая идея реализуется в предложенной в [3] нечеткой байесовой ЭС. В этой системе нечеткость исходных данных отображается в описании с помощью функций принадлежности $\mu^{(k)}(x_j)$ нечетких значений априорных вероятностей наблюдения значений контролируемых параметров x_j при условии, что объект находится в состоянии S_k. Байесова система преобразует контролируемый набор параметров $X^{(0)}$ с учетом совокупности $\{\mu^{(k)}(x_j^{(0)})\}$ в набор апостериорных вероятностей $P\left(S_k / X^{(0)}\right)$, k=1,2,…p.

Понятно, что нечеткость исходных данных навязывает нечеткость результата. В [3] нечеткие априорные вероятности описаны треугольными функциями принадлежности. Исчерпывающий результат состоял бы в получении функций принадлежности апостериорных вероятностей состояний. К сожалению, в [3] содержится лишь паллиативное решение задачи: получены формулы для расчета носителей нечетких чисел, описывающих апостериорное распределение вероятностей состояний.

Цель

Разработка технологии расчета функций принадлежности для апостериорных вероятностей состояний объекта.

Постановка задачи

Пусть по результатам предварительной обработки реальных данных или экспертного оценивания получены основные статистические характеристики (математическое ожидание и дисперсия) значений априорных вероятностей наблюдения каждого из контролируемых параметров x_j, $j = 1,2,...,n$, при условии, что объект находится в каждом из возможных состояний $S_1, S_2, ..., S_p$, то есть имеются наборы $\left(m_1^{(k)}, m_2^{(k)}, ..., m_n^{(k)}\right)$, $\left(D_1^{(k)}, D_2^{(k)}, ..., D_n^{(k)}\right)$, $k = 1,2,...,p$.

В соответствии с формулой Байеса набор апостериорных вероятностей состояний объекта в ситуации, когда в результате контроля получен вектор значений параметров $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, отыскивается в результате последовательного применения формул

$$P\left(S_k / x_1^{(0)}\right) = \frac{P\left(x_1^{(0)} / S_k\right) \cdot P(S_k)}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_1^{(0)} / S_k\right) \cdot P(S_k)}, \qquad (7)$$

$$P\left(S_k / x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = \frac{P\left(x_2^{(0)} / S_k\right) \cdot \hat{P}_1(S_k)}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_2^{(0)} / S_k\right) \cdot \hat{P}_1(S_k)}, \qquad (8)$$

$$\hat{P}_1(S_k) = P\left(S_k / x_1^{(0)}\right), \quad k = 1,2,...,p, \qquad (9)$$

$$P\left(S_k / x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) = \frac{P\left(x_3^{(0)} / S_k\right) \cdot \hat{P}_2(S_k)}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_3^{(0)} / S_k\right) \cdot \hat{P}_2(S_k)}, \qquad (10)$$

$$\hat{P}_2(S_k) = P\left(S_k / x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right),, \qquad (11)$$

$$k=1,2,...,p$$

и т.д.

Поставим задачу расчета функций принадлежности нечетких значений апостериорных вероятностей состояний объекта

$$P\left(S_k \big/ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)} \right),\ k=1,2,...,p.$$

Основные результаты

Предварительно рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Пусть заданы математическое ожидание $m \neq 0$ и дисперсия D случайной величины z. Требуется оценить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $v=\frac{1}{z}$.

Понятно, что $M[v]=M\left[\frac{1}{z}\right]=\frac{1}{m}$. Получим теперь оценку дисперсии случайной величины v. В соответствии с неравенством Чебышева вероятность того, что отклонение случайной величины z от ее математического ожидания m меньше заданного положительного ε не меньше, чем $1-\frac{D}{\varepsilon^2}$, то есть

$$P(m-\varepsilon < z < m+\varepsilon) \geq 1-\frac{D}{\varepsilon^2}.$$

Зададим требуемую вероятность γ того, что диапазон $[m-\varepsilon, m+\varepsilon]$ накрывает z и найдем значение ε. Имеем

$$1-\frac{D}{\varepsilon^2}=\gamma.$$

Отсюда

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{D}{1-\gamma}}=\frac{\sigma}{\sqrt{1-\gamma}}.$$

Таким образом, с вероятностью γ границы диапазона определяются значениями

$$z_{min}=m-\frac{\sigma}{\sqrt{1-\gamma}}>0,\ z_{max}=m+\frac{\sigma}{\sqrt{1-\gamma}}.$$

Тогда диапазон возможных значений v определяется интервалом

$$\left[\frac{1}{z_{max}}, \frac{1}{z_{min}}\right]=\left[\frac{1}{m+\frac{\sigma}{\sqrt{1-\gamma}}}, \frac{1}{m-\frac{\sigma}{\sqrt{1-\gamma}}}\right].$$

Длина этого интервала равна

$$l=\frac{1}{m-\frac{\sigma}{\sqrt{1-\gamma}}}-\frac{1}{m+\frac{\sigma}{\sqrt{1-\gamma}}}=$$

$$=2\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{1-\gamma}}}{m^2-\frac{\sigma^2}{1-\gamma}}.$$

При этом, в соответствии с тем же неравенством Чебышева

$$1-\frac{D[v]}{l^2}=\gamma,$$

откуда

$$D[v]=l^2(1-\gamma)=\frac{4D}{\left(m^2-\frac{D}{1-\gamma}\right)^2}.$$

Вернемся к основной задаче. Будем последовательно оценивать математическое ожидание и дисперсию апостериорных вероятностей, задаваемых в соответствии с (7)-(11). Рассчитаем математическое ожидание и дисперсию числителя и знаменателя в соотношении (7).

$$M\left[P\left(x_1^{(0)} \big/ S_k\right)\cdot P(S_k)\right]=$$

$$=m_1^{(k)}\cdot P(S_k), \tag{12}$$

$$D\left[P\left(x_1^{(0)} \big/ S_k\right)\cdot P(S_k)\right]=$$

$$=D_1^{(k)}\cdot P^2(S_k), \tag{13}$$

$$M\left[\sum_{k=1}^{p}\left(x_1^{(0)} \big/ S_k\right)\cdot P(S_k)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{p} m_1^{(k)}\cdot P(S_k), \tag{14}$$

$$D\left[\sum_{k=1}^{p}\left(x_1^{(0)} \big/ S_k\right)\cdot P(S_k)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{p} D_1^{(k)}\cdot P^2(S_k), \tag{15}$$

Тогда:

$$M\left[P\left(S_k / x_1^{(0)}\right)\right]=$$

$$=M\left[\frac{P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)}\right]=$$

$$=\frac{m_1^{(k)}\cdot P(S_k)}{\sum_{k=1}^{p} m_1^{(k)}\cdot P(S_k)}.$$

Для оценки дисперсии величины $P\left(S_k / x_1^{(0)}\right)$ используем следующее известное соотношение: для независимых случайных величин X и Y

$$D[XY]=D[X]D[Y]+$$
$$+M^2[X]\cdot D[Y]+M^2[Y]\cdot D[X].$$

Тогда

$$D\left[P\left(S_k / x_1^{(0)}\right)\right]=$$

$$=D\left[P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)}\right]=$$

$$=D^2\left[P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)\right]+$$

$$+D^2\left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)}\right]+$$

$$+M^2\left[P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)\right]\times \tag{16}$$

$$\times D\left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)}\right]+$$

$$+M^2\left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)}\right]\times$$

$$\times D\left[P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)\right].$$

В соответствии с решением вспомогательной задачи оценка величины

$$D\left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)}\right]$$

с заданной надежностью имеет вид

$$D\left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{p} P\left(x_1^{(0)} / S_k\right)\cdot P(S_k)}\right]=$$

$$=\frac{4D_1^{(k)}\cdot P^2(S_k)}{\left[\left(m_1^{(k)}\cdot P(S_k)\right)^2-\frac{D_1^{(k)}\cdot P^2(S_k)}{1-\gamma}\right]^2}= \tag{17}$$

$$=\frac{4D_1^{(k)}}{P^2(S_k)\left[\left(m_1^{(k)}\right)^2-\frac{D_1^{(k)}}{1-\gamma}\right]^2}.$$

Подставляя теперь (12)-(15), а также (17) в (16) получим

$$D\left[P\left(S_k / x_1^{(0)}\right)\right]=$$

$$=\left(D_1^{(k)}\right)\cdot P^2(S_k)\times$$

$$\times\frac{4\left(D_1^{(k)}\right)}{P^2(S_k)\left[\left(m_1^{(k)}\right)^2-\frac{D_1^{(k)}}{1-\gamma}\right]^2}+$$

$$+\left(m_1^{(k)}\right)^2 \cdot \frac{4D_1^{(k)}}{\left[\left(m_1^{(k)}\right)^2 - \frac{D_1^{(k)}}{1-\gamma}\right]^2} +$$

$$+\frac{1}{\left(m_1^{(k)}\right)^2} \cdot D_1^{(k)}. \qquad (18)$$

Проведенные вычисления с учетом (9) повторим для соотношений (8), (10) и т.д.

Таким образом, в конце концов будут получены наборы значений математического ожидания $\left(m_A^{(1)}, m_A^{(2)}, ..., m_A^{(p)}\right)$ и дисперсии $\left(D_A^{(1)}, D_A^{(2)}, ..., D_A^{(p)}\right)$ для всех компонентов апостериорного распределения вероятностей состояний объекта. С использованием этих наборов для описания функций принадлежности соответствующих нечетких чисел естественно выбрать гауссовы модели

$$\mu_A\left(P(S_k)\right) = exp\left\{-\frac{\left(P(S_k) - m_A^{(k)}\right)^2}{2D_A^{(k)}}\right\},$$

$k = 1,2,..., p$.

Поставленная задача решена.

Выводы

Таким образом, получены соотношения для описания функций принадлежности апостериорных вероятностей состояний объекта в нечеткой байесовой экспертной системе, в которой неопределенность входа задается значениями статистических характеристик априорных вероятностей.

Список литературы

1. Zadeh L.A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning / L.A. Zadeh // Information Sciences, 1975. – Vol.4. – pp 199-249.
2. Takagi T. Fuzzy identifications of systems and its application to modeling and control / T. Takagi, M. Cugeno // IEEE Trans. SMC, 1985. – pp 116-132.
3. Серая О.В. Модели и информационные технологии оценки и прогнозирования состояния многомерных динамических объектов в условиях нечетких входных данных: дис. канд. техн. наук: 05.13.06; защищена 17.01.02; утв. 13.03.02 / Серая Оксана Владимировна; НТУ «ХПИ». – Х., 2001. – 251 с.

Поступила в редакцию 21.10.2009