

ЗАЙЧЕНКО Ю.П.,  
МАЛИХЕХ ЕСФАНДИЯРФАРД,  
ОВИ НАФА АГАИ АГ ГАМИШ

## АНАЛИЗ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЧЕТКОГО ПОРТФЕЛЯ

В статье рассмотрены задачи портфельной оптимизации в нечетких условиях. Построена математическая модель данной задачи. Исследована зависимость «оптимальная доходность – риск» для нечеткого портфеля. Определены достаточные условия при которых эта зависимость будет монотонно убывающей. Приводятся результаты экспериментальных исследований, подтверждающие теоретические результаты.

The fuzzy portfolio optimization problem is considered. The mathematical model is constructed and the dependence “optimal benefits – risk” is investigated. The sufficient conditions for this dependence to be monotonously decreasing are obtained. The results of experimental investigations are presented.

### Введение

Задача оптимизации инвестиционного портфеля в условиях неопределенности в последние годы вызывает значительный интерес. Для решения этой проблемы был предложен аппарат нечетких множеств в работах [1,2], согласно которому доходности акций и в целом доходность инвестиционного портфеля рассматриваются как нечеткие числа с заданной функцией принадлежности, а риск трактуется как возможность (субъективная вероятность) ситуации, когда реальная доходность портфеля оказывается ниже ожидаемой доходности нечеткого портфеля. С целью более обоснованной оценки доходности акций на фондовом рынке по предыстории в задаче портфельной оптимизации был предложен метод прогнозирования, применение которого позволило улучшить результаты [3]. В ходе экспериментальных исследований разработанного метода были построены зависимости «оптимальная доходность-риск» для нечеткого портфеля, которые во многих случаях имели прямо противоположный вид по сравнению с классической моделью Марковица-Тоббина. Целью настоящей работы является получение аналитических условий, при которых зависимость «оптимальная доходность – риск» для нечеткого портфеля будет монотонно убывающей и их экспериментальная проверка.

Задача нечеткой портфельной оптимизации базируется на допущении, что доходность портфеля является нечетким числом (НЧ), описываемым тройкой параметров:

$$r = (r_{\min} = \sum_{i=1}^N x_i r_i; \tilde{r} = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i; r_{\max} = \sum_{i=1}^N x_i r_{i2}),$$

где  $(r_i, \tilde{r}_i, r_{2i})$  – доходность  $i$ -той ценной бумаги.  $x_i$ -доля  $i$ -той бумаги в портфеле.

Для того, чтобы определить структуру портфеля, который обеспечит максимальную доходность при заданном уровне риска, требуется решить следующую задачу оптимизации:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\beta = \text{const} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, N} \quad (3)$$

$$0 < \beta < 1$$

где  $\beta$ - уровень риска.

В работе [1] было показано, что этот случай возможен когда

$$r_{\min} = \sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i$$

либо когда

$$\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \leq r^* < \sum_{i=1}^N x_i r_{i2} = r_{\max}$$

$$\text{Пусть } \sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i.$$

Тогда используя результаты работы [3], задача (1)-(3) сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \rightarrow \max \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} * \left( \left( r^* - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \right) + \ln \left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \right) \right) = \beta \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \leq r^* \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i > r^* \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, N} \quad (8)$$

Учитывая вид для  $r_{\min}$ ,  $\tilde{r}$ , и  $r_{\max}$ , а также формулу (1), данную задачу нахождения интервала доходности для нечеткого портфеля с  $n$  ЦБ можно свести к задаче с двумя ЦБ  $(x_1, x_2)$  с минимальной и максимальной доходностями.

Пусть первая ЦБ имеет минимальную доходность в портфеле, описываемую НЧ  $r_1 = [r_{11}, \tilde{r}_1, r_{12}]$ , а вторая ЦБ – максимальную доходность в портфеле  $r_2 = [r_{21}, \tilde{r}_2, r_{22}]$ . Пусть также критериальное значение описывается НЧ  $r^* = [r^*_1, r^*, r^*_2]$ .

При этом допустим  $r_{11} < r_{21}$ ;  $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$ .

Тогда  $\tilde{r} = \tilde{r}_1 x_1 + \tilde{r}_2 x_2$ ;  $x_1 + x_2 = 1$ . Причем  $x=x_2$ , тогда  $x_1=1-x$ .

Доходность портфеля описывается в этом случае НЧ вида  $r = [r_{\min}, \tilde{r}, r_{\max}]$ , где:

$$\begin{aligned} r_{\min} &= r_{11}(1-x) + r_{12}x; \\ \tilde{r}_1 &= \tilde{r}(1-x) + \tilde{r}_2x; \\ r_{\max} &= r_{21}(1-x) + r_{22}x; \end{aligned}$$

Требуется найти такое  $x$ , что  $\tilde{r} = \tilde{r}_1(1-x) + \tilde{r}_2x \rightarrow \max$  (9)

при условиях:  $\beta(x) \leq \beta_{\text{зад}}$  (10)

где выражение  $\beta(x)$  для случая  $0 < \beta < 1$  и  $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$  при подстановке  $x_1=1-x$ ;  $x_2=x$ ;  $n=2$  в выражение (5) дает:

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \frac{1}{(1-x)(r_{12} - r_{11} + x(r_{22} - r_{21}))} * \\ &* \{ r^* - ((1-x)r_{11} + xr_{21}) + ((1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*) \} * \\ &* \ln \frac{\tilde{r}_1(1-x) + \tilde{r}_2x - r^*}{x(\tilde{r}_1 - r_{11}) + (1-x)(\tilde{r}_2 - r_{21})} \leq \beta \end{aligned}$$

Достаточные условия монотонно убывающего характера зависимости  $(\tilde{r}_{\text{opt}} \beta)$  являются следующие

$$\frac{\partial \tilde{r}_{\text{opt}}}{\partial x} \geq 0; \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} \geq 0 \quad (11)$$

Рассмотрим сначала  $\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} > 0$ .

Очевидно  $\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} = \tilde{r}_2 - \tilde{r}_1$  (12) и т.к., по предположению,  $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$ , то  $\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} > 0$ .

Рассмотрим теперь зависимость  $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ .

Для нахождения сложной производной  $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ , введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A(x) &= r^* - ((1-x)r_{11} + xr_{12}); \\ B(x) &= (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^* \end{aligned} \quad (13)$$

$$C(x) = (1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21}) \quad (14)$$

$$D(x) = (1-x)(r_{12} - r_{11}) + x(r_{22} - r_{21}) \quad (15)$$

Тогда

$$\beta(x) = \left[ A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] \frac{1}{D(x)} \quad (16)$$

Найдем производную  $\frac{\partial \beta}{\partial x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial x} &= \{ [A'(x) + B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} + \\ &+ \frac{B'(x)C(x) - B(x)C'(x)}{C(x)}] D(x) - \end{aligned} \quad (17)$$

$$D'(x) [A(x) + (x \ln \frac{B(x)}{C(x)})] \} \frac{1}{D^2(x)}$$

Выясним условия, при которых  $\frac{\partial \beta}{\partial x} < 0$ .

Для этого необходимо, чтобы выражения в фигурных скобках  $\{ \}$  в (17) было меньше 0.

Очевидно

$$\begin{aligned} A'(x) &= r_{11} - r_{21}; \quad B'(x) = -\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 \\ C'(x) &= -(\tilde{r}_1 - r_{11}) + (\tilde{r}_2 - r_{21}) \\ &= (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - (r_{21} - r_{11}) \\ D'(x) &= (r_{22} - r_{21}) - (r_{12} - r_{11}). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим (18) в (17) и после несложных преобразований в (17) получим следующее условие

$$C(x)D(x) \left[ A'(x) + B'(x) + B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] - DC'(x)B(x) - C(x)D'(x) \tag{19}$$

$$(A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)}) < 0$$

Подставляя выражение для  $A(x); A'(x); B(x); B'(x); C(x); C'(x); D(x); D'(x)$  в (19), получим

$$\begin{aligned} & [(1-x)(r_{12} - r_{11}) + x(r_{22} - r_{21})]^* \\ & * [(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21})]^* \\ & [(r_{11} - r_{21}) + (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) + (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)^* \\ & * \ln \frac{(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21})}] - \\ & - [(1-x)\tilde{r} + x\tilde{r}_2 - r^*][(\tilde{r}_2 - r_{21}) - \\ & - (\tilde{r}_1 - r_{11})]^* \\ & * [(1-x)(r_{12} - r_{11}) + x(r_{22} - r_{21})] - \\ & - [(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21})]^* \\ & * [(r_{22} - r_{21}) - (r_{12} - r_{11})]^* \\ & (r^* - (1-x)r_{11} - xr_{21} + \\ & + [(1-x)\tilde{r} + x\tilde{r}_2 - r^*]^* \\ & \ln \frac{(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21})} \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть функции принадлежности являются треугольными симметричными. Тогда

$$\tilde{r}_1 - r_{11} = r_{12} - \tilde{r}_1 = \Delta_1; \tilde{r}_2 - r_{21} = r_{22} - \tilde{r}_2 = \Delta_2$$

и, очевидно,  $r_{12} - r_{11} = 2\Delta_1; r_{22} - r_{21} = 2\Delta_2$ .

Подставляя эти выражения в (20) получим

$$\begin{aligned} & [(1-x)2\Delta_1 + x2\Delta_2][(1\Delta_1)x2\Delta_2 + x\Delta_2]^* \\ & [(\Delta_2 - \Delta_1) + (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)^* \\ & * \ln \frac{(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21})}] - \\ & - [(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*][\Delta_2 - \Delta_1]^* \\ & [(1-x)2\Delta_1 + x2\Delta_2]^* [(1\Delta_1)x2\Delta_2 + x\Delta_2]^* \\ & * [\Delta_2 - \Delta_1]^* (r^* - (1-x)r_{11} - xr_{21}) + \\ & + [(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*]^* \\ & * \ln \frac{(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21})} \end{aligned} \tag{21}$$

Преобразуем правую часть выражения (21)

$$\begin{aligned} & - [(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*](\Delta_2 - \Delta_1)^* \\ & * [(1-x)2\Delta_1 + x2\Delta_2] - [(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2]^* \\ & * (\Delta_2 - \Delta_1) \{ r^* - (1-x)r_{11} - xr_{21} \} = \\ & = -2[(1-x)\Delta_1 + \Delta_2](\Delta_2 - \Delta_1)^* \\ & * [(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^* + r^* - (1-x)r_{11} - xr_{21}] = \\ & = -2[(1-x)\Delta_1 + \Delta_2](\Delta_2 - \Delta_1)[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2] = \\ & = 2[(1-x)\Delta_1 + \Delta_2]^2(\Delta_2 - \Delta_1) \end{aligned} \tag{22}$$

Анализируя выражение (22) нетрудно проверить, что

$$C(x)D(x)[A'(x) + B'(x)] = D(x)C'(x)B(x) + C(x)D'(x)A(x)'$$

поэтому после сокращения подобных членов в (22) останутся члены

$$C(x)D(x)B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} - C(x)D'(x)B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \tag{23}$$

И подставляя выражение для  $C(x); D(x); B(x); B'(x)$  в (23) получим

$$\begin{aligned} & [(1-x)(r_{12} - r_{11}) + x(r_{22} - r_{21})]^* \\ & * [(1-x)(r_{12} - r_{11}) + x(r_{22} - r_{21})]^* \\ & * (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - (1-x)\tilde{r} + x\tilde{r}_2 - r^* * \\ & (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)(r_{22} - r_{21})^* \\ & * \ln \frac{(1-x)(\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*)}{(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21})} \end{aligned} \tag{24}$$

Откуда

$$\begin{aligned} & 2[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2]^* \\ & * \ln \frac{(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21})}]^* \\ & * [(1-x)2\Delta_1 + x2\Delta_2(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - \\ & (\Delta_2 - \Delta_1)][(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*] \end{aligned} \tag{25}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & (1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21}) = \\ & = (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - (1-x)r_{11} - \\ & xr_{21} = (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r_{\min} \end{aligned}$$

и так как  $r^* > (1-x)r_{11} + xr_{21} = r_{\min}$ , то

$$\frac{B(x)}{C(x)} = \frac{(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21})} < 1$$

$$\ln \frac{B(x)}{C(x)} < 0 \tag{26}$$

Следовательно, для того, чтобы выражение (25) было меньше нуля необходимо и достаточно, чтобы

$$(1-x)2\Delta_1 + x2\Delta_2(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - (\Delta_2 - \Delta_1)[(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*]$$

было больше 0.

Исследуем условия, при которых

$$\{2[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2](\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - (\Delta_2 - \Delta_1)[(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*]\} > 0 \tag{27}$$

а) неравенства

$$\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1 > \Delta_2 - \Delta_1 = (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - (r_{21} - r_{11})$$

выполняются, если  $r_{21} > r_{11}$ .

б) неравенства

$$2[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2] > (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*$$

выполняется, если

$$2(1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + 2x(\tilde{r}_2 - r_{21}) - (1-x)\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 + r^* = (1-x) * (\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21}) + r^* = (1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21}) + r^* - [(1-x)r_{11}] + xr_{21} = (1-x)\Delta_1 + x\Delta_2 + r^* - r_{\min} > 0$$

и (28) выполняется, если  $r^* - r_{\min} > 0$ .

Таким образом, мы получили следующие достаточные условия для (см. рис 1)

а)  $\tilde{r}_1 < r^* < \tilde{r}_2$ ;

б)  $r_{11} < r_{21}$ ;

в)  $r^* > r_{\min} = (1-x)r_{11} + x_1r_{21}$ ;

г)  $r^* < \tilde{r} = (1-x)\tilde{r}_1 + x_1\tilde{r}_2$ ;

При выполнении этих условий, зависимость «оптимальная доходность-риск» будет иметь монотонно-убывающий характер.

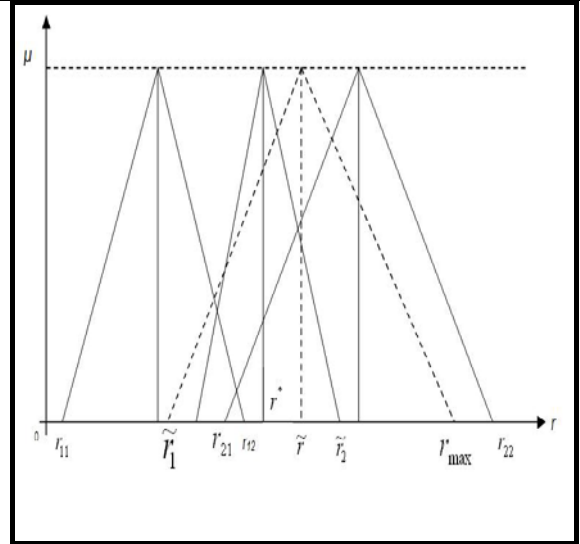


Рис.1. Графическая интерпретация достаточных условий

**Экспериментальные исследования зависимости «оптимальная доходность - риск»**

Проведем экспериментальные исследования зависимости «оптимальная доходность-риск» для нечеткого инвестиционного портфеля. При этом рассмотрим случаи двух ЦБ с малой доходностью и высокой доходностью с различными волатильностями.

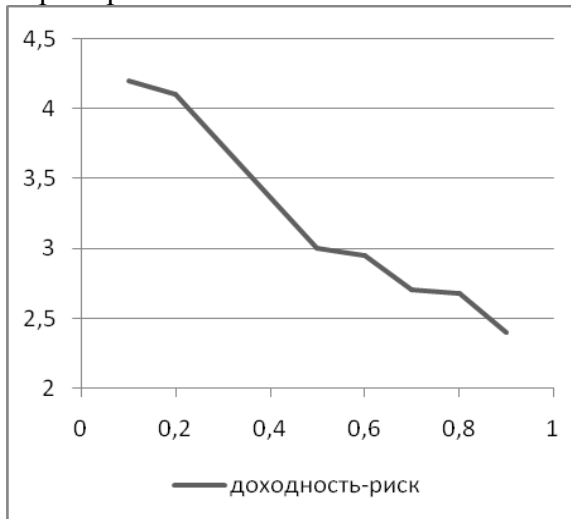
При этом будем варьировать величину критериального значения.

Исследуем случаи, когда эта зависимость будет иметь монотонно-убывающий характер.

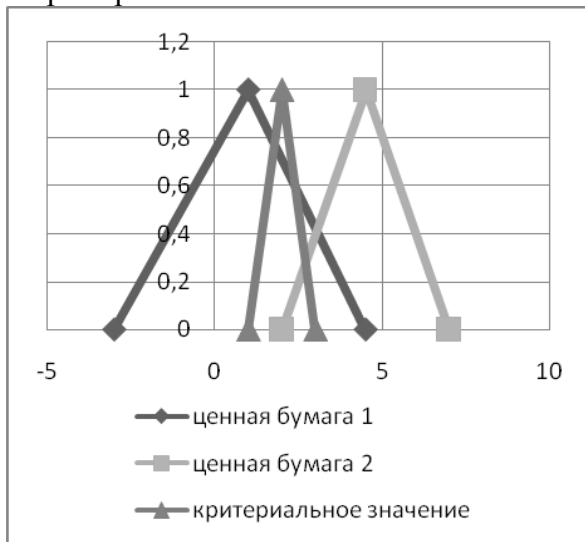
Случай 1. Когда первой ЦБ была задана высокая волатильность и низкая доходность, а другой ЦБ средняя волатильность и высокая доходность, то зависимость доходность-риск носила монотонно – убывающий характер. Это иллюстрируется графиками на рис.2.

Ниже приводятся различные примеры взаимного расположения ФП доходностей акций и критериального значения и соответствующие построенные зависимости «оптимальная доходность-риск» (рис. 2-10).

Пример 1

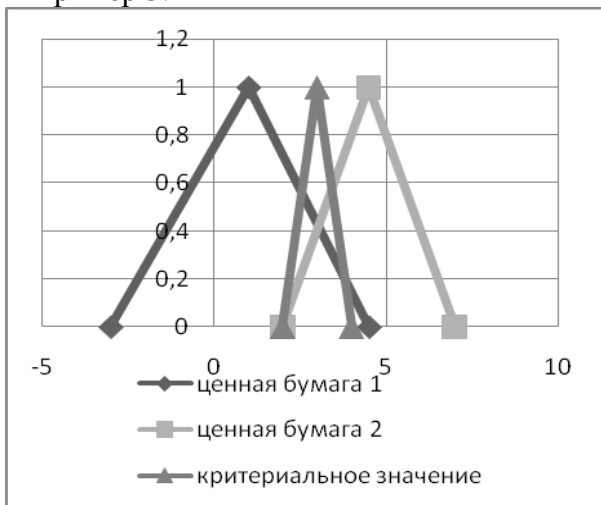


**Рис. 2. График зависимости доходность- риск нечеткого портфеля**



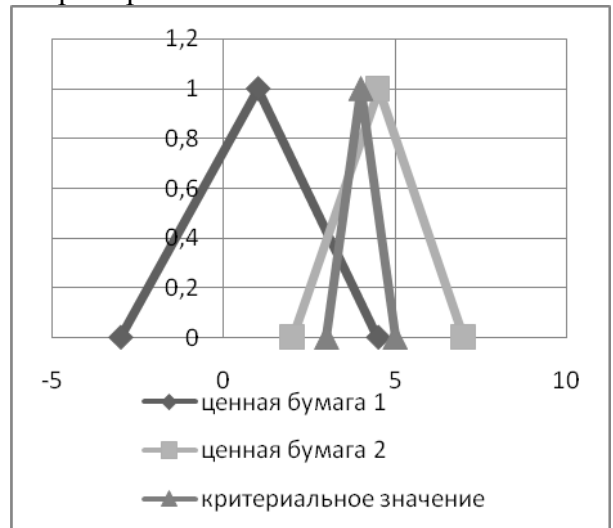
**Рис. 3. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения для треугольных ФП**

Пример 3.



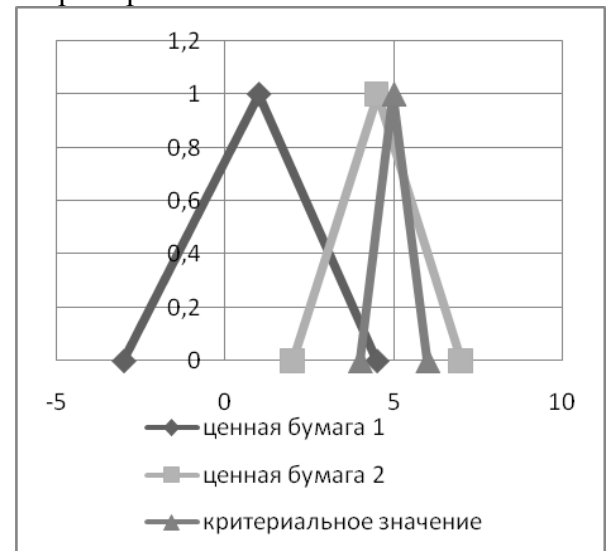
**Рис. 4. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения.**

Пример 4.



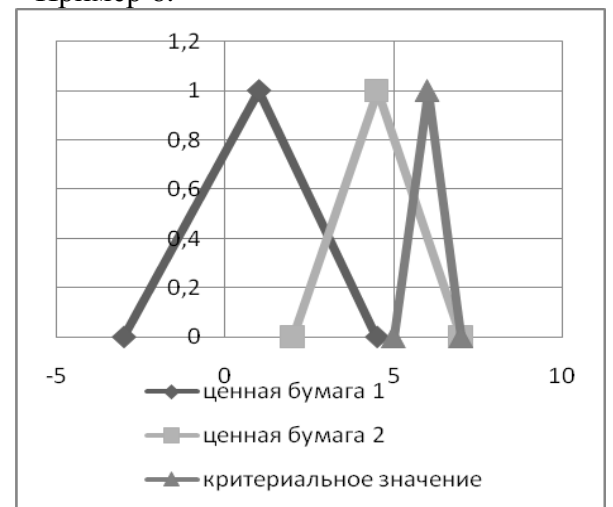
**Рис. 5. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения.**

Пример 5.



**Рис. 6. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения.**

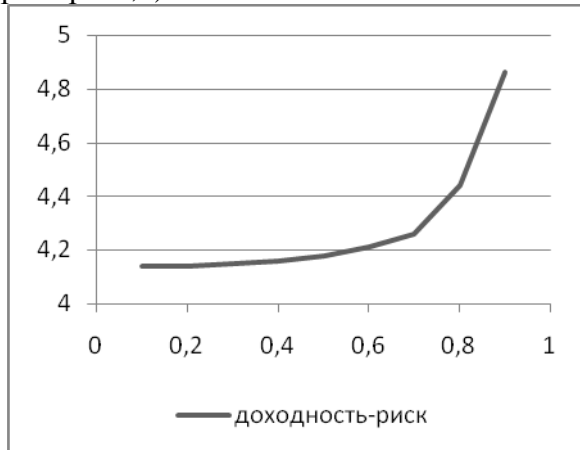
Пример 6.



**Рис. 7. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения для треугольных ФП.**

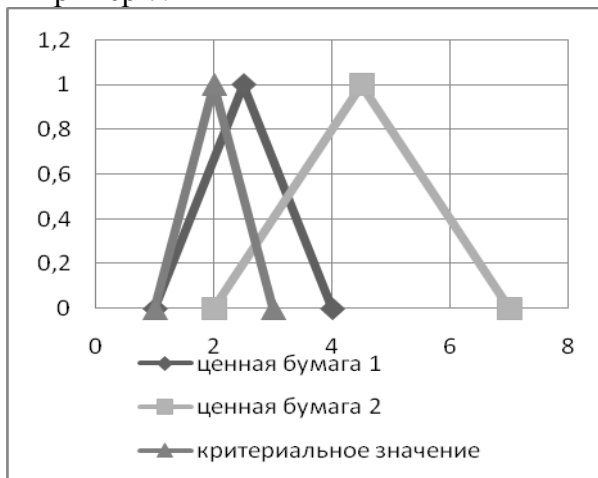
2. Случай монотонно- возрастающей зависимости «доходность- риск»

При задании первой ЦБ низкой волатильности и низкой доходности, а второй ЦБ- высокой волатильности и высокой доходности и при задании критериального значения меньше ожидаемой доходности менее доходной ЦБ зависимость «доходность- риск» носит возрастающий характер (см.рис. 8-10, примеры 7,8).



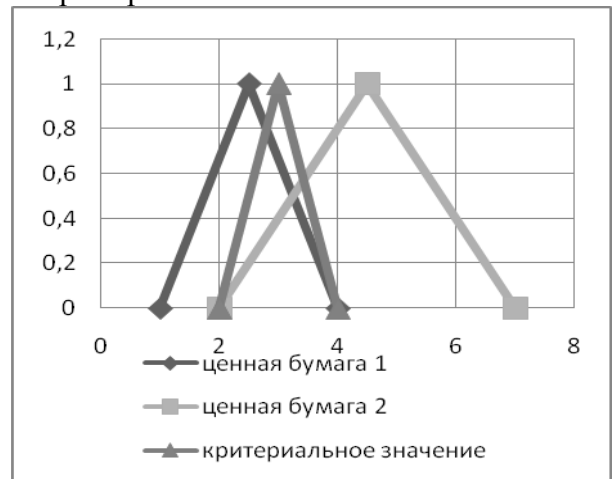
**Рис 8. График зависимости «доходность- риск»**

Пример 7.



**Рис. 9. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения**

Пример 8.



**Рис. 10. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения**

### Выводы

В работе исследована модель задачи оптимизации нечеткого инвестиционного портфеля. Установлены достаточные условия, при которых зависимость «оптимальная доходность-риск» будет иметь убывающий характер, прямо противоположный зависимости для классической модели Марковица-Тоббина.

Проведены экспериментальные исследования условий и оптимальных решений задачи портфельной оптимизации для убывающей и возрастающей зависимостей «доходность-риск», которые полностью подтвердили теоретические результаты.

Зависимость «доходность- риск» нечеткого портфеля носит преимущественно убывающий характер в случаях, когда менее доходная ЦБ имеет высокую или среднюю волатильность, а более ценная ЦБ имеет высокую доходность при малой и средней волатильности, а при этом критериальное значение находится между доходностями обеих ЦБ.

Зависимость «доходность-риск» носит возрастающий характер, в случаях, когда менее доходная ЦБ имеет малую или среднюю волатильность, а более доходная ЦБ имеет высокую волатильность, а критериальное значение меньше доходности менее ценной ЦБ или расположено между ожидаемыми доходностями обеих ЦБ.

**Список литературы**

1. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Анализ инвестиционного портфеля для различных видов функций принадлежности // Системні дослідження та інформаційні технології. - 2008.- №2.- С. 59-76.
2. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Нечеткий метод индуктивного моделирования для прогнозирования курсов акций в задачах портфельной оптимизации // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2008. - № 1.- С. 9-14.
3. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард, Заика А.И. Анализ инвестиционного портфеля на основе прогнозирования курсов акций // Вісник національного технічного університету України «КПІ». «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: ТОО «ВЕК+», 2007. - № 47. - С. 168-179.
4. Zaychenko Yurii, Esfandiyarfard Maliheh. Optimization of the investment portfolio in the conditions of uncertainty // International Journal "Information Technologies and Knowledge" Volume 2. - 2008. – Vol.2. - Number 3. - P. 225-233.

Поступила в редакцію 16.12.2009