УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А. А.,
МИСЮРА Е. Б.,
КОСТИК Д.Ю.

МИНИМИЗАЦИЯ СУММАРНОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАДАНИЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ДИРЕКТИВНЫХ СРОКОВ

Рассматриваются новые правила отсечений бесперспективных перестановок в задаче минимизации суммарного запаздывания при выполнении независимых заданий одним прибором для случая, когда директивные сроки заданий могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

New rules for truncation unpromising permutations are considered for the problem of minimizing the total tardiness of independent tasks execution on one machine for the case when the deadlines of tasks can take both positive and negative values.

Введение

В книге [1] приведен эффективный точный ПДС-алгоритм решения труднорешаемой задачи комбинаторной оптимизации «Минимизация суммарного запаздывания при выполнении независимых заданий на одном приборе» (МСЗ).

Постановка задачи. Предположим, что задано множество независимых заданий $J = \{ j_1,\ j_2,\ ...,\ j_n \}$, каждое из которых состоит из одной операции. Для каждого задания j известны длительность выполнения l_j и директивный срок выполнения d_j. Задания поступают в систему одновременно в момент времени $a_j = 0, j = \overline{1,n}$. Прерывания не допускаются. Необходимо построить расписание выполнения заданий для одного прибора, минимизирующее суммарное запаздывание при выполнении заданий:

$$f = \sum_{j=1}^{n} \max\left(0, C_j - d_j\right),$$

где C_j – момент завершения выполнения задания j.

Предложенный в [1] ПДС-алгоритм обладает следующими свойствами. В процессе исследования теоретических свойств задачи МСЗ:

а) найдены логико-аналитические условия (p-условия), выполнение которых в процессе решения ПДС-алгоритмом произвольной индивидуальной задачи данного класса приводит к получению оптимального решения полиномиальной вычислительной процедурой заранее известной сложности;

б) если в процессе решения индивидуальной задачи выполняются теоретически обоснованные логико-аналитические условия (d-условия), то она разбивается (декомпозируется) на подзадачи меньшей размерности.

В данной статье рассматриваются новые правила отсечений для случая, когда директивные сроки d_j могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Новые правила отсечений

Введем необходимые для изложения материала определения. Пусть j и j_i обозначает номер работы в соответствии с индексацией, заданной функционалом; $j_{[g]}$ – номер работы, стоящей в допустимом расписании на позиции g.

Определение 1. Резервом времени $r_{j_{[g]}}$ задания $j_{[g]}$ называется величина $r_{j_{[g]}} = d_{j_{[g]}} - C_{j_{[g]}} > 0$.

Определение 2. Перестановкой называется процедура переноса задания $j_{[g]}$ на позицию k ($k > g$) и, одновременно, заданий, занимающих позиции $g + 1$, $g + 2$,..., $k - 1$, k на позиции g, $g + 1$, ..., $k - 2$, $k - 1$, соответственно.

Определение 3. Интервалом перестановки задания $j_{[g]}$ на позицию k в последовательности σ называется интервал, определяемый суммой длительностей заданий, занимающих в этой последовательности позиции g+1, g+2, ..., k – 1, k.

Определение 4. Встраиванием называется процедура переноса задания $j_{[g]}$ на позицию p ($g > p$) и, одновременно, заданий p, p + 1, ..., g – 2, g – 1 на позиции p + 1, р + 2, ..., g – 1, g, соответственно.

Определение 5. Интервалом встраивания задания $j_{[g]}$ на позицию p ($g > p$) в последовательности σ называется интервал, определяемый суммой длительностей заданий, занимающих в этой последовательности позиции p, p+1,...g–1, где p определяется из условия

$$\sum_{i=p-1}^{g-1} l_{j_{[i]}} < C_{j_{[g]}} - d_{j_{[g]}} \leq \sum_{i=p}^{g-1} l_{j_{[i]}} \quad (1)$$

Если же условие (1) не выполняется ни для одной позиции, то p = 1. Таким образом, запаздывание по заданию j на позиции p должно быть равно нулю или минимально.

Определение 6. Задание $j_{[g]}$ называется запаздывающим в последовательности σ, если для него выполняется условие $d_{j_{[g]}} < C_{j_{[g]}}$.

Определение 7. Последовательностью $\sigma^{уп}$ (сигма упорядоченная) называется последовательность заданий множества J, $j = \overline{1,n}$, в которой задания упорядочены по неубыванию длительностей l_j, т. е. $\forall j, i, j < i : l_j < l_i$, а при $l_j = l_i, d_j \leq d_i$.

Определение 8. Процедурой свободной перестановки называется процедура перестановки задания $j_{[k]}$ на позицию q ($k < q$) такую, что $d_{j_{[k]}} \geq C_{j_{[q]}}$, $d_{j_{[k]}} < C_{j_{[q+1]}}$, если хотя бы для одного задания на интервале $\overline{k+1,q}$ выполняется:

$$d_{j_{[i]}} < C_{j_{[i]}}, \quad i = \overline{k+1,q}.$$

Определение 9. Последовательность заданий, полученную в результате выполнения всех свободных перестановок в последовательности $\sigma^{уп}$, назовем $\sigma^{сп}$.

Разработанный ПДС-алгоритм построен на перестановках и встраиваниях, направленных на оптимальное использование запаздывающими заданиями резервов времени незапаздывающих заданий.

В следующих утверждениях обосновываются новые свойства последовательности $\sigma^{сп}$, позволяющие сформулировать новые правила отсечения бесперспективных перестановок.

Утверждение 1. В последовательности $\sigma^{сп}$ для заданий с отрицательными директивными сроками справедливо: при $i < j : l_i \leq l_j$.

Доказательство основано на правилах построения последовательности $\sigma^{сп}$: задания с отрицательными директивными сроками в перестановках не участвуют.

Пусть уже построена оптимальная последовательность для заданий на интервале [1, $g-1$] и выполняется оптимизация для задания $j_{[g]}$.

Утверждение 2. Если на интервале встраивания задания $j_{[g]}$ с отрицательным знаением директивного срока есть другое задание $j_{[k]}$ с отрицательным значением директивного срока, то при выполнении процедуры встраивания задание $j_{[g]}$ займет позицию k + 1.

Доказательство. Из утверждения 1 следует $l_{j_{[k]}} \leq l_{j_{[g]}}$. Возможные моменты начала выполнения заданий $j_{[k]}$ и $j_{[g]}$ равны нулю, и так как задание $j_{[k]}$ на предыдущих шагах алгоритма не заняло более раннюю позицию, чем k, то задание $j_{[g]}$ с большей длительностью не сможет занять более раннюю позицию, чем k+1.

Утверждение 3. Если в последовательности $\sigma^{сп}$ первые позиции i = [1, k] занимают задания, для которых $r_{j_{[i]}} \leq 0$, то последовательность $\sigma^{сп}$ декомпозируется на две подпоследовательности: σ^1 включает задания от $j_{[1]}$ до $j_{[k]}$, σ^2 – от $j_{[k+1]}$ до $j_{[n]}$. Подпоследовательность σ^1 оптимальна, и задания, принадлежащие этой подпоследовательности, в перестановках не участвуют. Оптимизация выполняется только для заданий подпоследовательности σ^2.

Доказательство. При построении последовательности $\sigma^{сп}$ задания, которые в результате свободных перестановок заняли более поздние позиции, в соотвествии с утверждением 1.2 из [1] не претендуют на резервы на интервале [1, k]. Для остальных заданий выполняется:

$$l_{j_{[i]}} \leq l_{j_{[r]}}, j_{[i]} \in \sigma^1, j_{[r]} \in \sigma^2,$$

и любые перестановки из σ^2 в σ^1 приведут к увеличению суммарного запаздывания (утверждение 1.1 из [1]).

Иллюстративный пример

В последующих таблицах $f_j = \max(0; C_j - d_j)$. Пусть исходные данные задаются таблицей 1.

Табл. 1. Последовательность $\sigma^{уп}$

Позиция	№ задания	l_i	d_i	C_i	f_i
1	1	60	1200	60	–
2	2	72	-100	132	232
3	3	98	-300	230	530
4	4	101	484	331	–
5	5	104	200	435	235
6	6	109	383	544	161
7	7	115	590	659	69
8	8	120	720	779	59
9	9	125	-400	904	1304
10	10	128	970	1032	62
11	11	130	-100	1162	1262
					3914

Табл. 2. Последовательность $\sigma^{сп}$

Позиция	№ задания	l_i	d_i	C_i	f_i
1	2	72	-100	72	172
2	3	98	-300	170	470
3	5	104	200	274	74
4	6	109	383	383	0
5	4	101	484	484	0
6	7	115	590	599	9
7	8	120	720	719	0
8	9	125	-400	844	1244
9	10	128	970	972	2
10	11	130	-100	1102	1202
11	1	60	1200	1162	0
					3173

На интервале [1, 5] последовательность $\sigma^{сп}$ оптимальна на основании утверждения 3. Для запаздывающего задания 9 перестановка на более раннюю позицию не реализуется, т.к. существующих резервов заданий 7 и 8 недостаточно. Для задания 10 выполняется: $l_9 < l_{10}$, $d_9 < d_{10}$. Следовательно, задание 10 остается на занимаемой позиции. На интервале встраивания задания 11 находится задание 9 с отрицательным значением директивного срока. Следовательно, согласно утверждению 2, позиция встраивания задания 11 равна 9, но эту позицию занимает запаздывающее задание высшего приоритета, следовательно, задание 11 остается на занимаемой позиции (утверждение 1.1 из [1]). Таким образом, последовательность $\sigma^{сп}$ – оптимальная последовательность.

Исследования эффективности новых отсечений

Для исследования эффективности ПДС-алгоритма с новыми отсечениями была создана система моделирования, написанная на языке C# в среде разработки Visual Studio 2010 под библиотеку Microsoft .NET 4.0. Испытания проводились на персональном компьютере с процессором Pentium CORE 2 Duo 2.0 ГГц с оперативной памятью 2 Гбайта под управлением ОС Microsoft Windows Vista. Исследовались задачи размерности до 500 заданий.

Для определения эффективности новых отсечений были проведены исследования зависимости среднего времени решения задачи в зависимости от размерности. В тестовые задачи были сгенерированы по 100 примеров каждой размерности от 50 до 500 с шагом 50 при значениях фактора запаздывания T и диапазона директивных сроков R [2], соответственно равных 0,4 и 0,8. Проведенное моделирование для исследования эффективности ПДС-алгоритма показало, что добавление новых отсечений значительно уменьшает среднее время решения задач, в зависимости от числа заданий с отрицательными директивными сроками. Результаты моделирования приведены в табл. 3. Проведенные исследования дали возможность показать полиномиальную зависимость среднего времени решения от размерности задач.

Табл. 3. Среднее время решения задач (мс)*

Размерность	Среднее время решения без дополнительных отсечений	Среднее время решения с дополнительными отсечениями
50	50	32
100	321	180
150	440	232
200	218	188
250	371	265
300	409	327
350	568	434
400	584	461
450	758	524
500	408	321

* Число заданий с отрицательными директивными сроками составляет 20% от общего числа заданий.

Выводы

Исследованы дополнительные свойства последовательности $\sigma^{сп}$, сформулированы новые правила отсечений в случае наличия заданий с отрицательными директивными сроками и правило декомпозиции последовательности $\sigma^{сп}$. Введение в алгоритм новых правил позволяет существенно сократить число выполняемых перестановок, что подтверждается результатами статистических исследований.

Перечень литературы

1. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография.– К.: Наукова думка, – 2010.– 573 с.
2. Fisher, M.L. (1976) A dual algorithm for the one machine scheduling problem. Mathematical Programming, 11, 229-251.