УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
МИСЮРА Е.Б.,
ЩЕРБАТЕНКО О.В.,
МИХАЙЛОВ В.В.,
МЕЛЬНИКОВ О.В.

ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ТРЕХУРОВНЕВОЙ МОДЕЛИ ОПЕРАТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ СИСТЕМ С СЕТЕВЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. ПОСТАНОВКА НОВЫХ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

Приводится формальное описание трехуровневой модели оперативного планирования в классическом виде, что позволяет сформулировать постановку новых задач построения результирующего расписания, имеющих эффективное точное решение.

A formal description in the traditional sense of the three-level model of operational planning is given, which allows to formulate the new problems of constructing the resulting schedule with effective exact solution.

Введение

В [1] формальное описание трехуровневой модели оперативного планирования систем с сетевым представлением технологических процессов методически реализуется в органическом единстве с описанием построения результирующего оперативного плана, что максимально просто позволяет обосновать посылку о том, что результирующий эвристический алгоритм построения расписания реализует решение в области глобального экстремума по любому из предложенных критериев.

В статье приводится формальное описание трехуровневой модели оперативного планирования в классическом виде, что позволяет сформулировать постановку новых задач построения результирующего расписания, имеющих эффективное точное решение.

Агрегированная модель представлена тремя уровнями. Первый уровень предназначен для решения на основе исходной информации следующей задачи.

Постановка задачи первого уровня модели (исходная постановка задачи)

Задано множество n комплексов взаимосвязанных работ $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ (комплекс работ J_i, $i = \overline{1,n}\ \overline{1,n}$, в дальнейшем называется заданием). На каждом подмножестве J_i частичный порядок задан ориентированным ацикличным графом. Частичная упорядоченность очевидным образом определяется технологией выполнения комплекса работ. Каждая следующая работа может начаться только по завершению предыдущих работ. Вершины графа отвечают работам, связи указывают на отношения предшествования. Конечные вершины отвечают завершению выполнения заданий. Для каждой вершины j графа известна l_j – детерминированная продолжительность выполнения (интегрированный показатель, отображающий выделенные ресурсы – материальные, человеческие, производственные; длительность выполнения каждого задания определяется его критическим путем); для каждой работы $j \in I$ (I – множество конечных вершин, идентифицирующихся с множеством заданий) задан вес ω_j; для отдельных заданий задан директивный срок окончания d_i. Величина веса определяется потенциальной сложностью, важностью и неоднозначностью (для работ, связанных с необходимостью получения нового научного решения) выполнения тех работ, без которых в целом задание не может быть выполнено. Для выполнения работ применяется множество ограниченных ресурсов.

Необходимо построить распределение (согласованный план) выполнения работ по ресурсам с учетом критериев оптимальности, указанных ниже, и их комбинаций.

Главная цель планирования в условиях рынка – максимизация прибыли предприятия. Поэтому максимизация прибыли является общим критерием оптимальности для всех уровней модели планирования. Прибыль рассчитывается как планируемый доход от реализации всех изделий (выполнения всех заданий) минус затраты *З* (все издержки), очевидным образом рассчитываемые по оптимальному расписанию в блоке принятия решений. В процедуру принятия решений и максимизацию прибыли оптимизация по $З$ не входит.

В модели рассматриваются следующие критерии оптимальности.

Задача 1. Максимизация суммарной прибыли предприятия в случае отсутствия директивных сроков.

В обеспечении прибыльности предприятия важное значение играет фактор времени. В выигрыше будет тот, кто обеспечивает максимально быстрое выполнение заказов и сокращение времени выхода на рынок новых товаров. При отсутствии директивных сроков прибыль от реализации i-го изделия (выполнения i-го задания) является функцией времени и равна $P_i(t) = \omega_i(T)\cdot(T - C_i)$, где $\omega_i(T)$ – весовой коэффициент изделия (задания) i, определенный экспериментальным путем; T – плановый период; $C_i \le T$ – момент окончания выполнения изделия (задания) i, соответствующий моменту окончания выполнения его конечной вершины. Критерий максимизации суммарной прибыли предприятия в этом случае определяется выражением

$$\begin{aligned} F_1 = \sum_{i=1}^{n} P_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(T)\cdot(T - C_i) + P - З = \\ = T\cdot\sum_{i=1}^{n}\omega_i(T) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i(T)\cdot C_i + P - З \to \max, \end{aligned} \quad (1)$$

где P – гарантированный минимальный доход от продажи (выполнения) всех n изделий (заданий). Таким образом, максимизируемая функция имеет вид

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\omega_i(T)\cdot(T - C_i)\right\} + P - З,$$

отсюда критерий оптимальности:

$$\min\sum_{i=1}^{n}\omega_i(T)\cdot C_i \ (\textit{критерий 1}).$$

Итак, критерий F_1 эквивалентен критерию минимизации суммарного взвешенного момента окончания выполнения заданий (МВМ) при заданном отношении порядка на множестве работ каждого задания.

Задача 2. Максимизация суммарной прибыли предприятия при условии: для всех заданий $i \in I$ введены директивные сроки d_i, которые не могут быть нарушены (планирование «точно в срок»):

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\omega_i U_i\right\} - З, \quad \text{где } U_i = \begin{cases}1, C_i = d_i\\ 0, C_i \ne d_i\end{cases},$$

ω_i – прибыль от выполнения i-го задания, если оно выполнено точно в срок. Критерий оптимальности:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\omega_i U_i\right\} \ (\textit{критерий 2});$$

Задача 3. Максимизация суммарной прибыли предприятия при условии: для некоторых заданий $i \in \overline{1,k}$ заданы директивные сроки, которые не могут быть нарушены, для остальных заданий $d_i = 0$:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{k}\omega_i U_i + \sum_{i=k+1}^{n}\omega_i(T)\cdot(T - C_i)\right\} + P - З,$$

где $U_i = \begin{cases}1, C_i = d_i\\ 0, C_i \ne d_i\end{cases}$, P – гарантированный минимальный доход от продажи (выполнения) изделий (заданий) $i = \overline{k+1,n}$; ω_i – прибыль от выполнения i-го задания, если оно выполнено точно в срок; $\omega_i(T)$ – весовой коэффициент задания i (имеет тот же смысл, что и в задаче 1). Критерий оптимизации:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{k}\omega_i U_i + \sum_{i=k+1}^{n}\omega_i(T)\cdot(T - C_i)\right\} \ (\textit{критерий 3});$$

Задача 4. Максимизация суммарной прибыли предприятия при условии: для всех заданий $i \in I$ введены директивные сроки d_i, необходимо минимизировать суммарное взвешенное запаздывание выполнения заданий относительно директивных сроков:

$$\max\left\{P - \sum_{i=1}^{n}\omega_i \max(0, C_i - d_i)\right\} - З,$$

где P – гарантированный минимальный доход от продажи (выполнения) всех n изделий (заданий), если все они выполнены без запаздывания; ω_i – штраф за запаздывание окончания выполнения i-го задания относительно директивного срока на единицу времени. Критерий оптимизации:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\omega_i \max(0, C_i - d_i)\right\} \ (\textit{критерий 4});$$

Величина $\omega_i \max(0, C_i - d_i)$ – уменьшение дохода P в случае выполнения задания i с запаздыванием $C_i - d_i$. Решение по выполнению или отказу от выполнения таких заданий принимается в блоке принятия решений.

Задача 5. Постановка задачи соответствует задаче 4 с дополнительным условием: для некоторых заданий $i \in \overline{1,k}$ директивные сроки не могут быть нарушены:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{k}\omega_i' U_i - \sum_{i=k+1}^{n}\omega_i'' \max(0, C_i - d_i)\right\} + P - З,$$

где $U_i = \begin{cases}1, C_i = d_i\\ 0, C_i \neq d_i\end{cases}$, ω_i' – прибыль от выполнения i-го задания, если оно выполнено точно в срок; ω_i'' – штраф за запаздывание окончания выполнения i-го задания относительно директивного срока на единицу времени, P – гарантированный минимальный доход от выполнения заданий $i = \overline{k+1, n}$, если они выполнены в срок. Критерий оптимальности:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{k}\omega_i' U_i - \sum_{i=k+1}^{n}\omega_i'' \max(0, C_i - d_i)\right\} (\textit{критерий 5}).$$

Величина $\omega_i'' \max(0, C_i - d_i)$ – уменьшение дохода P в случае выполнения задания i с запаздыванием $C_i - d_i$. Решение по выполнению или отказу от выполнения таких заданий принимается в блоке принятия решений.

Задача 6. Для всех заданий $i \in I$ введены директивные сроки d_i. Для каждого задания указана величина ω_i – абсолютная прибыль от выполнения задания, не зависящая от момента окончания выполнения задания в том случае, если задание выполняется без запаздывания относительно директивного срока, иначе прибыль предприятия по этому заданию равна нулю. Задача – максимизировать суммарную прибыль предприятия:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\omega_i U_i\right\} - З, \quad \text{где } U_i = \begin{cases}1, C_i \le d_i\\ 0, C_i > d_i\end{cases},$$

где ω_i – прибыль от выполнения i-го задания, если оно выполнено без запаздывания относительно директивного срока; $З$ – риск уменьшения прибыли из-за срыва выполнения задания в срок. Критерий оптимальности:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\omega_i U_i\right\} \quad (\textit{критерий 6}).$$

Задача 7. Для всех изделий заданы директивные сроки d_i. Необходимо минимизировать суммарный штраф предприятия как за опережение, так и за запаздывание относительно директивных сроков:

$$\max\left\{P - \sum_{i=1}^{n}\omega_i |C_i - d_i|\right\} - З,$$

где P – гарантированный минимальный доход от продажи (выполнения) всех n изделий (заданий), если все они выполнены без опережения и запаздывания; ω_i – штраф за отклонение момента окончания выполнения i-го задания от директивного срока на единицу времени. Критерий оптимизации:

$$\min\sum_{i=1}^{n} \omega_i |C_i - d_i|. \quad (\textit{критерий 7})$$

Величина $\omega_i |C_i - d_i|$ – уменьшение дохода P в случае выполнения задания i с запаздыванием $C_i - d_i$. Решение по выполнению или отказу от выполнения этих заданий принимается в блоке принятия решений.

Ограничения:

– простои ресурсов при выполнении работ допускаются;
– прерывания работ при выполнении запрещены.

Задачи 1–7 относятся к труднорешаемым, и для их решения не существует эффективных методов решения, как точных, так и приближенных. Предлагаемая трехэтапная модель планирования позволила создать эффективные эвристические алгоритмы, реализующие решение в области глобального оптимума.

Второй уровень модели является агрегированным представлением первого уровня. Агрегирование с целью уменьшения размерности исходной задачи осуществляется с помощью построения агрегированных работ и мультиресурсов. В результате выполнения агрегации свойства модели сохраняются.

Совокупность ресурсов и исполнителей разделяется на отдельные, достаточно автономные модули – *мультиресурсы* (мультиресурс – устойчивая группа совместно работающих ресурсов – например, бригада, группа однотипного оборудования, однопрофильное подразделение). Мультиресурс характеризуется суммарным количеством рабочих мест, общей длительностью переналадки оборудования. Мультиресурсы могут находиться как в одной, так и в разных организациях. В общем случае, если это обусловлено производственной необходимостью и позволит более эффективно выполнить заданный объем работ, то в состав мультиресурса может быть включено разнотипное оборудование.

Агрегированная работа – совокупность работ, выполняемых в одном мультиресурсе в рамках одного захода в мультиресурс по одному заданию.

Длительность выполнения агрегированной работы в мультиресурсе однозначно определяется ее критическим путем в данном мультиресурсе, который строится с помощью стандартных процедур. Например, для случая, когда в мультиресурсе с однотипным оборудованием выполняется некоторое количество в общем случае связных работ, составляющих агрегированную работу, формальная модель критического пути определяется последовательностью множеств работ p типов. Множество работ r-го типа выполняется после множества работ (r–1)-го типа, $r = \overline{2, p}$. Множество работ r-го типа состоит из n_r независимых работ. Тогда l_{jk} – длительность j-й агрегированной работы в данном k-м мультиресурсе – рассчитывается по формуле

$$l_{jk} = \sum_{r=1}^{p} \frac{\widehat{l}_r n_r}{m_k}, \qquad (2)$$

где $\widehat{l}_r$ – длительность выполнения работы r-го типа, m_k – количество однотипных рабочих мест k-го мультиресурса. Если существует несколько однотипных мультиресурсов $k = \overline{s, t}$, отличающихся количеством рабочих мест, в каждом из которых может выполняться агрегированная работа, то длительность выполнения для каждого из мультиресурсов определяется по формуле (2).

Некоторые агрегированные работы, принадлежащие разным заданиям и выполняемые в одном мультиресурсе, объединяются в общие агрегированные работы (семейства) так, чтобы не требовалась наладка для работы, если она принадлежит тому же семейству, что и агрегированная работа, выполненная перед ней. На графе связности это отображено общими вершинами. При объединении агрегированных работ в «общие вершины» исключается время переналадки для объединяемых работ, которое в отдельных случаях может существенно превышать длительность выполнения работ. Если объединение в «общие вершины» не реализуется, то при выполнении каждой агрегированной работы необходимо учитывать время переналадки, что существенно увеличит время прохождения заданий в системе. Длительность выполнения «общей вершины» равна сумме длительностей выполнения входящих в ее состав агрегированных работ.

«Общие вершины», включающие большое количество агрегированных работ, с одной стороны, имеют преимущество эффективного использования мультиресурса, так как число наладок существенно уменьшается. С другой стороны, выполнение такой «общей вершины» может задержать выполнение другой агрегированной работы, не принадлежащей «общей вершине». Поэтому разработаны эвристические правила построения «общих вершин», учитывающие критерии оптимальности, приоритеты заданий, которым принадлежат объединяемые агрегированные работы, директивные сроки и прогнозируемое время поступления агрегированной работы на выполнение в данный мультиресурс [1].

Постановка задачи второго (агрегированного) уровня модели

Задано множество n комплексов взаимосвязанных агрегированных работ $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ (комплекс агрегированных работ J_i, $i = \overline{1, n}$ $\overline{1, n}$, в дальнейшем называется заданием). На каждом подмножестве J_i частичный порядок задан ориентированным ацикличным графом. Каждая следующая агрегированная работа может начаться только по завершению предыдущих агрегированных работ. Вершины графа отвечают агрегированным работам, связи указывают на отношения предшествования. Конечные вершины отвечают завершению выполнения заданий. Для выполнения работ применяется множество мультиресурсов. Для каждой вершины j графа задана l_{jk} – длительность j-й агрегированной работы в k-м мультиресурсе, определяемая по формуле (2); для каждой агрегированной работы $j \in I$ (I –множество конечных вершин, идентифицирующихся с множеством заданий) задан вес ω_j; для отдельных заданий задан директивный срок окончания d_i. Некоторые агрегированные работы, принадлежащие разным заданиям и выполняемые в одном мультиресурсе, объединены в общие агрегированные работы (семейства), длительность выполнения которых равна сумме длительностей выполнения входящих в ее состав агрегированных работ.

Необходимо построить согласованный план выполнения комплексов агрегированных работ мультиресурсами с учетом критериев оптимальности 1–7.

Ограничения:

– простои мультиресурсов при выполнении работ допускаются;
– прерывания агрегированных работ при выполнении запрещены;
– агрегированная работа не передается в другие мультиресурсы до ее полного завершения;
– длительность выполнения агрегированной работы в мультиресурсе определяется ее критическим путем в данном мультиресурсе;
– для семейств агрегированных работ наладка мультиресурса включается только один раз перед выполнением семейства;
– прерывание выполнения семейства агрегированных работ запрещено.

Несмотря на меньшую размерность задачи второго уровня, она все же остается труднорешаемой. Поэтому требуется представить предприятие (систему планирования) в виде одного прибора с целью применения точного эффективного алгоритма решения задачи МВМ, позволяющего решать задачи большой размерности.

Третий уровень модели отвечает уровню, при котором предприятие (система планирования) представляется в виде одного прибора. Для этого длительности агрегированных работ приводятся к длительности их выполнения на одном приборе. Пусть l_{jk} – длительность j-й агрегированной работы при выполнении в k-м мультиресурсе. Тогда длительность выполнения j-й агрегированной работы на одном приборе при условии, что она может выполняться на одном из однотипных мультиресурсов $k=\overline{s,t}$, определяется по формуле Конвея-Максвелла:

$$l_j^1 = \frac{1}{\sum_{k=s}^{t}\frac{1}{l_{jk}}}. \tag{3}$$

Сведение (3) с формулой (2) дает длительность агрегированной работы

$$l_j^1 = \sum_{r=1}^{p}\frac{\hat{l}_r n_r}{m_{st}}, \tag{4}$$

где $\hat{l}_r$ – длительность выполнения работы r-го типа, $m_{st} = \sum_{k=s}^{t} m_k$ – суммарное количество однотипных рабочих мест мультиресурсов $\overline{s,t}$.

Т. к. одним из самых важных критериев планирования является длительность прохождения заданий в системе, то введем следующие дополнительные ограничения:

– длительность выполнения каждого задания определяется его критическим путем;
– общие агрегированные работы разных заданий лежат на их критических путях и выполняются в одном мультиресурсе.

Поэтому для каждого задания находится критический путь, определяющий минимальную длительность его выполнения. Некоторые агрегированные работы, принадлежащие разным критическим путям и выполняемые в одном мультиресурсе, объединяются в «общие вершины» по описанным выше правилам. На основе критических путей заданий и набора «общих вершин» строится ориентированный ациклический граф, называемый далее графом на критических путях.

Постановка задачи третьего уровня модели (уровень одного прибора)

Задано множество n критических путей для комплексов взаимосвязанных агрегированных работ $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ (комплекс работ J_i, $i=\overline{1,n}$, в дальнейшем называется заданием) и набор «общих вершин» на критических путях, объединяющий их в ориентированный ациклический граф на критических путях. Вершины графа отвечают агрегированным работам, связи указывают на отношения предшествования. Конечные вершины отвечают завершению выполнения заданий. Для каждой вершины j графа задана l_j^1 – длительность выполнения на одном приборе, определяемая формулой (3); для каждой агрегированной работы $j \in I$ (I – множество конечных вершин, идентифицирующихся с множеством заданий) задан вес ω_j; для отдельных заданий задан директивный срок окончания d_i. Предполагается, что все агрегированные работы выполняются последовательно на одном приборе.

Необходимо построить последовательность выполнения агрегированных работ одним прибором, оптимальную по критериям оптимальности 1–7.

Ограничения:

– простои прибора при выполнении агрегированных работ запрещены;
– прерывания агрегированных работ при выполнении запрещены.

Как показано выше, критерий максимизации прибыли сводится к критерию МВМ. Для решения задачи МВМ разработан эффективный точный ПДС-алгоритм [1], позволяющий решать задачи большой размерности. При назначении на выполнение заданий одним прибором определяется приоритет задания (отношение ожидаемой прибыли каждого задания к длине его критического пути), что позволило для каждого из критериев 2–7 построить соответствующую аппроксимирующую задачу МВМ [1] при условии, что веса всех вершин, кроме конечных, равны нулю. Задача решается на графе на критических путях. В результате решения аппроксимирующей задачи МВМ точным алгоритмом [1] получаем приоритетно-упорядоченную последовательность, определяющую очередность назначения заданий на выполнение: чем больше приоритет подпоследовательности, тем раньше в заданный срок агрегированные работы этой подпоследовательности назначаются на выполнение.

Полученная на третьем уровне приоритетно-упорядоченная последовательность агрегированных работ служит дополнительной информацией, позволяющей значительно повысить эффективность полученных решений на втором и первом уровнях. На третьем уровне мы получаем точное решение, и свойства этого решения максимально допустимо сохраняются на следующих этапах. Действительно, согласованное планирование 2-го этапа и по нему получение эвристического расписания 3-го этапа является лишь детализацией обобщенного решения в конкретном расписании модели 3-го этапа с максимально возможным сохранением свойств расписания третьего уровня, которому на агрегированном уровне соответствует глобальный оптимум нашего функционала.

Если в качестве критерия эффективности системы планирования используется критерий 4, то на третьем этапе планирования возникает следующая многоэтапная задача календарного планирования. После реализации блока принятия решений (рис. 8.2 [1]) в процессе согласования получаем результирующий портфель заказов с согласованными новыми директивными сроками, которые не могут быть нарушены. Следовательно, на третьем этапе построения результирующего плана выполнения работ получаем многоэтапную (сетевую) задачу календарного планирования, решение которой не связано с планами, полученными на 1 и 2 этапах. Они используются в блоке принятия решений для получения результирующего портфеля заказов и окончательно согласованных директивных сроков. Критериями оптимальности таким образом сформулированной многоэтапной задачи календарного планирования являются:

1) при условии выполнения директивных сроков и ограничения на работу оборудования без прерываний при выполнении множества независимых работ минимизировать суммарное время опережения директивных сроков. Требование на непрерывность работы оборудования в процессе реализации технологического процесса в большинстве случаев является естественным ограничением.

2) при условии выполнения директивных сроков минимизировать суммарное время опережения директивных сроков. В этом случае предполагается, что оборудование при выполнении множества независимых работ может работать с прерыванием.

Полученные результаты [1, 2, 3] в области построения ПДС-алгоритмов для труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации позволяют построить точный эффективный алгоритм построения расписания на третьем этапе по критерию 1.

Для точного решения задачи по критерию 2 необходимо построить ПДС-алгоритмы для соответствующих задач календарного планирования с учетом возможности прерывания работы оборудования в процессе выполнения множества работ.

Выводы

Приведено формальное описание в классическом виде трехуровневой модели оперативного планирования систем с сетевым представлением технологических процессов. Показано, что результирующий эвристический алгоритм построения расписания реализует решение в области глобального экстремума по любому из предложенных критериев. Сформулированы на примере критерия 4 постановки новых задач построения результирующего расписания, имеющих эффективное точное решение на основе результатов, полученных в области построения ПДС-алгоритмов для труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации [1].

Список литературы

1. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография.– К.: Наукова думка, – 2010.– 573 с.
2. Конструктивные полиномиальные алгоритмы решения индивидуальных задач из класса NP. / А.А.Павлов, А.Б.Литвин, Е.Б.Мисюра, Л.А.Павлова, В.И.Родионов, под редакцией А.А.Павлова.– К.: Техника, 1993.– 126 с.
3. ПДС-алгоритми для важкорозв'язуємих комбінаторних задач. Теорія і методологія розробки / О.А.Павлов, Л.О.Павлова. – Ужгород: Поличка «Карпатського краю» №15, – 1998.– 320 с.