УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
МИСЮРА Е.Б.,
ХАЛУС Е.А.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ПРИБОРА ПО КРИТЕРИЮ МИНИМИЗАЦИИ СУММАРНОГО ОПЕРЕЖЕНИЯ ЗАДАНИЙ ПРИ УСЛОВИИ ДОПУСТИМОСТИ РАСПИСАНИИ

Рассмотрена задача составления расписаний выполнения независимых заданий с произвольны-ми длительностями и различными директивными сроками на одном приборе по критериям ми-нимизации суммарного опережения и нахождения максимально позднего момента начала вы-полнения заданий в допустимом расписании. Предложены точные полиномиальные алгоритмы для отдельных случаев задачи, для общего случая определена верхняя оценка отклонения пока-зателя качества от оптимального.

We consider a scheduling problem of independent tasks execution with arbitrary durations and various due dates on a single machine by minimizing the total earliness and finding the maximum startup time of the tasks in a feasible schedule. The exact polynomial algorithms are proposed for particular cases of the task, for the general case an upper estimate of the deviation from the optimum quality index is determined.

Введение

Рассмотрена задача составления расписаний выполнения независимых заданий с произволь-ны-ми длительностями и различными директивными сроками на одном приборе по критериям ми-нимизации суммарного опережения и нахождения максимально позднего момента начала вы-полнения заданий в допустимом расписании. Предложены точные полиномиальные алгоритмы для отдельных случаев задачи, для общего случая определена верхняя оценка отклонения пока-зателя качества от оптимального.

Постановка задачи

Задано множество независимых заданий $J = \{ j_1, j_2, ..., j_n\}$, каждое из которых состоит из одной операции. Для каждого задания j известны длительность выполнения p_j и директивный срок выполнения d_j. Прерывания не допускаются. Задания поступают в систему одновременно. Необходимо:

1) найти максимально поздний момент r начала выполнения заданий в допустимом расписании;

2) минимизировать суммарное опережение выполнения заданий относительно директивного срока при условии допустимости расписания.

Определение 1. Если для заданного момента начала выполнения заданий объективно существует расписание, в котором удовлетворены все директивные сроки, то такое расписание называется допустимым.

Теорема 1. Пусть существует произвольная допустимая последовательность выполнения заданий одним прибором $\sigma_1 = \{j_{[1]}, j_{[2]}, ..., j_{[n]}\}$, где $j_{[k]}$ обозначает задание на позиции k в текущей последовательности. Последовательность на этом множестве заданий, упорядоченная по неубыванию значений директивных сроков, также допустима.

Доказательство. Перенумеруем задания в последовательности σ_1 по неубыванию значений директивных сроков: $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$. Пусть задание 1 с минимальным значением директивного срока d_1 занимает в σ_1 позицию k_1, момент окончания этого задания в текущей последовательности $C_{j_{[k_1]}} \le d_{j_{[k_1]}} = d_1$. Перенесем задание 1 с позиции k_1 на позицию 1. Задания $j_{[k_1+1]}, j_{[k_1+2]}, \ldots, j_{[n]}$ на интервале $\overline{k+1, n}$ остаются на занимаемых позициях, задания $j_{[1]}, j_{[2]}, \ldots, j_{[k_1-1]}$ на интервале $\overline{1, k-1}$ смещаются на позиции 2, 3, … k_1. Последовательность принимает вид: $\sigma_2 = \{1, j_{[2]}, j_{[3]}, ..., j_{[k_1]}, ..., j_{[n]}\}$. (*Примечание.* Номера заданий в последовательности σ_2 вида $j_{[i]}$ могут не совпадают с номерами заданий, стоящих на тех же позициях в последовательности σ_1). В последовательности σ_2 справедливо:

$d_1 \le d_{j_{[i]}}\ \forall i = \overline{2, k_1}$. Очевидно, что подпоследовательность заданий $\{j_{[2]}, ..., j_{[k_1]}\}$ в σ_2 удовлетворяет условию: $C_{j_{[i]}} \le d_1\ \forall i = \overline{2, k_1}$, и задания на позициях 2, 3, …, k_1 остаются незапаздывающими, а последовательность σ_2 допустима. Аналогичная процедура выполняется для задания 2 со следующим минимальным значением директивного срока, которое переносится на позицию 2. Пусть задание 2 занимает в σ_2 позицию k_2, момент окончания этого задания в текущей последовательности $C_{j_{[k_2]}} \le d_{j_{[k_2]}} = d_2$. Перенесем задание 2 с позиции k_2 на позицию 2. Задания 1, $j_{[k_2+1]}, j_{[k_2+2]}, \dots, j_{[n]}$ остаются на занимаемых позициях, задания $j_{[2]}, \dots, j_{[k_2-1]}$ смещаются на позиции 3, 4, … k_2. Последовательность принимает вид: $\sigma_3 = \{1, 2, j_{[3]}, ..., j_{[k_2]}, ..., j_{[n]}\}$. (См. примечание к σ_2). В последовательности σ_3 справедливо: $d_2 \le d_{j_{[i]}}\ \forall i = \overline{3, k_2}$. Очевидно, что подпоследовательность заданий $\{j_{[3]}, ..., j_{[k_2]}\}$ в σ_3 удовлетворяет условию: $C_{j_{[i]}} \le d_2\ \forall i = \overline{3, k_2}$, и задания на позициях 3, 4, …, k_2 остаются незапаздывающими, а последовательность σ_3 допустима. Рассмотрим шаг s. Последовательность на этом шаге имеет вид: $\sigma_s = \{1, 2, …, s-1, j_{[s]}, ..., j_{[n]}\}$. Пусть задание s с очередным минимальным директивным сроком занимает в σ_s позицию k_s, момент окончания этого задания в текущей последовательности $C_{j_{[k_s]}} \le d_{j_{[k_s]}} = d_s$. Перенесем задание s с позиции k_s на позицию s. Задания 1, 2, …, $s-1$, $j_{[k_s+1]}, \dots, j_{[n]}$ остаются на занимаемых позициях, задания $j_{[s]}, ..., j_{[k_s-1]}$ смещаются на позиции $s+1$, … k_s. Последовательность принимает вид: $\sigma_{s+1} = \{1, 2, …, s, j_{[s+1]}, ..., j_{[n]}\}$. (См. примечание к σ_2). В последовательности σ_{s+1} справедливо: $d_s \le d_{j_{[i]}}\ \forall i = \overline{s+1, k_s}$. Очевидно, что подпоследовательность заданий $\{j_{[s]}, ..., j_{[k_s]}\}$ в σ_{s+1} удовлетворяет условию: $C_{j_{[i]}} \le d_s\ \forall i = \overline{s+1, k_s}$, и задания на позициях $s+1$, …, k_s остаются незапаздывающими, а последовательность σ_{s+1} допустима. Аналогичные действия выполняются до тех пор, пока не будет построена вся последовательность, упорядоченная по неубыванию директивных сроков, которая останется допустимой. Максимальный диапазон изменения s равен $\overline{1, n-1}$. Теорема доказана. ■

Следствие. Если расписание, упорядоченное по неубыванию директивных сроков, является недопустимым, то допустимого расписания не существует.

Теорема 2. Получены новые логико-аналитические условия реализации полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма решения задачи по критерию минимизации суммарного запаздывания для одного прибора [1]: если расписание, упорядоченное по неубыванию директивных сроков, является допустимым, то оно оптимально, в противном случае в оптимальном расписании суммарное запаздывание будет строго больше нуля.

Доказательство очевидным образом вытекает из следствия к теореме 1. ■

Приведем алгоритм определения самого позднего момента начала выполнения заданий $r_{\max}$ в системе $n \mid 1$, при котором расписание остается допустимым.

Алгоритм А

1. Строим, в соответствии с теоремой 1, расписание $\sigma = \{1, 2, … n\}$, в котором задания упорядочены по неубыванию директивных сроков.
2. Определяем момент запуска выполнения заданий r, при котором в расписании σ хотя бы одно задание j_k будет запаздывающим:
$$\exists k : d_k - r < \sum_{i=1}^{k} p_i .$$
3. Для момента запуска r находим задание j_l с максимальным запаздыванием относительного директивного срока и определеляем новый момент начала выполнения заданий $r_{\max} = r - \left(C_l - d_l\right)$, где $C_l - d_l$ – запаздывание по заданию j_l. В расписании с началом выполнения заданий $r_{\max}$ запаздывание по заданию j_l станет равным нулю, а остальные задания станут незапаздывающими. В результате выполнения этой процедуры построено допустимое расписание $\sigma^{доп}$.

Примечание. Начало временной оси выбирается так, чтобы всегда выполнялось условие

$r_{\max} > 0$ и допустимые $r < r_{\max}$ всегда были положительными.

Пример к алгоритму А

Табл. 1 – последовательность σ

j	p_j	d_j
1	25	110
2	30	120
3	40	150
4	30	200
5	25	250
6	35	270
7	45	370

Определяем момент запуска, при котором задание 3 станет запаздывающим:

$$r > d_3 - \sum_{i=1}^{3} p_i = 150 - (25 + 30 + 40) = 55.$$

Примем момент запуска равным 80 > 55. Последовательность принимает вид:

Табл. 2 – последовательность при r = 80

j	p_j	d_j	C_j	T_j
1	25	110	105	0
2	30	120	135	15
3	40	150	175	25
4	30	200	205	5
5	25	250	230	0
6	35	270	265	0
7	45	370	310	0

Здесь $T_j = \max(0; C_j - d_j)$ – запаздывание задания j. В этом расписании есть три запаздывающих задания (2, 3 и 4), задание 3 имеет максимальное запаздывание 25. Новый момент запуска заданий на выполнение: $r_{\max} = 80 - 25 = 55$. Получено допустимое расписание:

Табл. 3 – последовательность при моменте запуска r = r

j	p_j	d_j	C_j	T_j
1	25	110	80	0
2	30	120	110	0
3	40	150	150	0
4	30	200	180	0
5	25	250	205	0
6	35	270	240	0
7	45	370	285	0

Теорема 3. Алгоритм А строит допустимое расписание $\sigma^{доп}$, в котором момент начала выполнения заданий $r_{\max}$ является самым поздним.

Доказательство. При увеличении значения момента начала выполнения заданий в расписании $\sigma^{доп}$ появится запаздывание по заданию $j_{[l]}$, и расписание станет недопустимым. А при уменьшении значения момента начала выполнения заданий $r_{\max}$ не будет самым поздним. ■

Теорема 4. Допустимое расписание, построенное по неубыванию директивных сроков, является оптимальным по критерию минимизации суммарного опережения при выполнении условий:
$d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n, \quad p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_n$. Суммарное опережение минимально при моменте запуска $r_{\max}$.

Доказательство. Обозначим через $\sigma = \{1, 2, ..., n\}$ расписание, удовлетворяющее условиям теоремы 4. Допустим, что существует другое допустимое расписание $\sigma_1 = \{j_{[1]}, j_{[2]}, ..., j_{[n]}\}$ с моментом запуска $r_{\max}$, не совпадающее с расписанием σ и имеющее меньшее суммарное опережение. Доказательство проведем по аналогии с доказательством теоремы 1, выполняя аналогичные итерации, на каждой итерации будем определять величину изменения суммарного опережения в результате переноса заданий на позиции, которые они должны занимать в расписании σ.

Пусть задание 1 с максимальной длительностью занимает в последовательности σ_1 позицию $k_1 \neq 1$. Перенесем это задание на первую позицию. Расписание остается допустимым в соответствии с теоремой 1. Найдем величину изменения суммарного опережения в результате переноса: по заданию 1 в результате встраивания опережение увеличилось на $\sum_{i=1}^{k_1-1} p_{j_{[i]}}$, а по заданиям, смещенным на более поздние позиции, уменьшилось на $(k_1 - 1)p_1$, где $(k_1 - 1)$ – количество заданий на интервале переноса. Получаем последовательность σ_2. Длительность выполнения задания 1 самая большая, поэтому суммарное опережение по сравнению с σ_1 не увеличилось: $\Delta_1 = \sum_{i=1}^{k_1-1} p_{j_{[i]}} - (k_1 - 1)p_1 \le 0$. Выполняем аналогичную процедуру для следующего задания 2, занимающего в σ_2 некоторую позицию $k_2 \neq 2$. Это задание переносится на вторую позицию, изменение суммарного опережения в этом случае равно $\Delta_2 = \sum_{i=2}^{k_2-1} p_{j_{[i]}} - (k_2-2)p_2 \le 0$. Получаем последовательность σ_3, и т.д. Пусть построена последовательность σ_s. Выполняем аналогичную процедуру для задания s, занимающего в σ_s некоторую позицию $k_s \ne s$. Это задание переносится на позицию s, изменение суммарного опережения в этом случае равно $\Delta_s = \sum_{i=s}^{k_s-1} p_{j_{[i]}} - (k_s-s)p_s \le 0$. Получаем последовательность σ_{s+1}. Продолжаем выполнять процедуру переноса для заданий $i = \overline{s+1, n-1}$, пока не будет построено расписание σ_n, упорядоченное по невозрастанию значений длительностей заданий, в котором задания также упорядочены по неубыванию значений директивных сроков, т.е. расписание σ. Так как все величины изменений Δ_i, $i = \overline{1, n-1}$, не могут быть положительными, то суммарное опережение не увеличилось. Таким образом, суммарное опережение в расписании σ является минимальным.

Покажем, что при моменте запуска $r < r_{\max}$ суммарное опережение в оптимальном расписании будет иметь большее значение. В соответствии с первой частью доказательства теоремы, для момента запуска r оптимальным расписанием по критерию суммарного опережения является расписание, упорядоченное по неубыванию директивных сроков. Но у этого расписания суммарное опережение по сравнению с расписанием, полученным для момента запуска $r_{\max}$, увеличилось на величину $n(r_{\max} - r)$. Следовательно, расписание для момента запуска $r_{\max}$ имеет минимальное значение суммарного опережения. Теорема доказана. ■

Примечание. Если в допустимом расписании $\sigma = \{1, 2, ..., n\}$ с максимальным моментом начала выполнения заданий для произвольного C_k существуют задания $i \in \overline{1, k-1}$, для которых $C_k \le d_i$, то при упорядочении этих заданий по невозрастанию их длительностей получаем допустимое расписание с максимальным моментом начала выполнения заданий, в котором уменьшается суммарное опережение (в предположении, что в σ существуют как минимум две такие работы различной длительности, не упорядоченные по невозрастанию их значений).

Пример к теореме 4

Табл. 4 – расписание σ (момент запуска $r = r_{max} = 60$)

j	p_j	d_j	C_j	$d_j - C_j$
1	70	140	130	10
2	60	200	190	10
3	50	240	240	0
4	40	310	280	30
5	30	320	310	10
6	20	340	330	10
7	10	340	340	0
Суммарное опережение:				**80**

Построим другое допустимое расписание с тем же моментом запуска:

Табл. 5 – расписание σ_1

j	p_j	d_j	C_j	$d_j - C_j$
1	70	140	130	10
2	60	200	190	10
3	50	240	240	0
5	30	320	270	50
4	40	310	310	0
7	10	340	320	20
6	20	340	340	0
Суммарное опережение:				**90**

В этом расписании задания 1, 2, 3 стоят на позициях, соответствующих упорядочению по неубыванию длительностей. Задание 4 стоит не на своей позиции $k_4 = 5 \ne 4$. Переставляем его на позицию 4, получаем расписание σ_5, изменение суммарного опережения составило $\Delta_4 = \sum_{i=4}^{5-1} p_{j_{[i]}} - (5-4)p_4 = 30 - 40 = -10 < 0$.

Табл. 6 – расписание σ_5

j	p_j	d_j	C_j	$d_j - C_j$
1	70	140	130	10
2	60	200	190	10
3	50	240	240	0
4	40	310	280	30
5	30	320	310	10
7	10	340	320	20
6	20	340	340	0
Суммарное опережение:				**80**

В расписании σ_5 задания 1–5 стоят на позициях, соответствующих упорядочению по неубыванию длительностей. Задание 6 стоит не на своей позиции $k_6 = 7 \ne 6$. Переставляем его на позицию 6, получаем расписание $\sigma_7 = \sigma$ (табл.

4), изменение суммарного опережения $\Delta_6 = \sum_{i=6}^{7-1} p_{j_{[i]}} - (7-6)p_6 = 10 - 20 = -10 < 0$. Суммарное опережение в расписании σ является минимальным.

Теорема 5. В общем случае верхняя оценка отклонения суммарного опережения допустимого расписания, полученного упорядочением по неубыванию директивных сроков, от оптимального расписания для того же момента запуска по критерию минимизации суммарного опережения, определяется выражением:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \left(d_i - r_{\max} - \sum_{j=1}^{i} p_j \right) \Big/ \min_{j=\overline{i+1,n}} p_j \right\rfloor \Delta_i, \quad \Delta_i = \max\left(0, \max_{j=\overline{i+1,n}} p_j - p_i\right) \tag{1}$$

где $\lfloor a \rfloor$ обозначает ближайшее снизу целое от a.

Доказательство основано на первой части доказательства теоремы 4. Определяется наихудшее увеличение опережения при перестановке i-го задания на i-ю позицию в соответствии с упорядочением по неубыванию директивных сроков. Значение $\left\lfloor \left(d_i - r_{\max} - \sum_{j=1}^{i} p_j \right) \Big/ \min_{j=\overline{i+1,n}} p_j \right\rfloor$ определяет максимальное количество заданий, которые могут стоять перед i-м заданием, а величина Δ_i определяет увеличение опережения в результате перестановки. Если $\max_{j=\overline{i+1,n}} p_j - p_i < 0$, то Δ_i принимается равным нулю, т. к. заранее неизвестно, сколько заданий находится на интервале перестановке i-го задания на i-ю позицию: в общем случае на интервале перестановке есть другие задания, и значение суммарного опережения уменьшается. Если же интервал перестановки равен нулю, то функционал не изменяется. Таким образом, получена верхняя оценка отклонения суммарного опережения допустимого расписания, полученного упорядочением по неубыванию директивных сроков, от оптимального расписания для того же момента запуска. ■

Пример к теореме 5

Рассмотрим произвольное допустимое расписание, в котором задания упорядочены по неубыванию директивных сроков, с максимальным моментом запуска:

Табл. 7 – расписание σ
(момент запуска $r = r_{max} = 55$)

j	p_j	d_j	C_j	$d_j - C_j$
1	25	110	80	30
2	30	120	110	10
3	40	150	150	0
4	30	200	180	20
5	25	250	205	45
6	35	270	240	30
7	45	370	285	85
Суммарное опережение:				**220**

По формуле (1) вычисляем величину верхней оценки отклонения суммарного опережения от оптимального: $\lfloor 30/25 \rfloor \cdot 20 + \lfloor 10/25 \rfloor \cdot 15 + \lfloor 0/25 \rfloor \cdot 5 + \lfloor 20/25 \rfloor \cdot 15 + \lfloor 45/35 \rfloor \cdot 20 + \lfloor 30/45 \rfloor \cdot 10 = 1\cdot 20 + 0 + 0 + 0 + 1\cdot 20 + 0 = 40$.

Выводы

Рассмотрены актуальные задачи теории расписаний, не рассматриваемые ранее в данной постановке, которые найдут широкое применение в современных условиях планирования точно в срок. Проведено исследование свойств этих задач. Получены новые логико-аналитические условия реализации полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма решения задачи по критерию минимизации суммарного запаздывания для одного прибора [1]. Разработан точный полиномиальный алгоритм определения самого позднего момента начала выполнения заданий в системе $n \mid 1$, при котором расписание остается допустимым. Выделен частный случай задачи по критерию минимизации суммарного опережения и определены условия, при выполнении которых расписание будет оптимальным. Для общего случая получена верхняя оценка отклонения суммарного опережения допустимого расписания от оптимального.

Литература

1. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография.– К.: Наукова думка, – 2010.– 573 с.