УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
МИСЮРА Е.Б.,
СПЕРКАЧ М.О.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С ОБЩИМ ДИРЕКТИВНЫМ СРОКОМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ ПО РАЗНЫМ КРИТЕРИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Рассмотрены свойства задачи календарного планирования выполнения заданий параллельными приборами равной производительности по трем критериям оптимальности с общим директивным сроком. Показана взаимосвязь между всеми критериями оптимальности. Приведен алгоритм решения задачи нахождения минимума максимального момента завершения выполнения заданий, позволяющего получить расписание, в котором все задания выполняются без запаздывания.

The properties of the calendar scheduling task of the assignments' fulfillment are considered using parallel machines of equal performance on three criteria of optimality with common prescriptive timeline. The relationship between all the criteria of optimality is shown. An algorithm for solving the problem of finding the minimum of the maximum completion time of the assignments' fulfillment is given. It provides a schedule with all tasks carried out without delay.

Введение

Рассмотрены свойства задачи календарного планирования выполнения заданий параллельными приборами равной производительности по трем критериям оптимальности с общим директивным сроком. Показана взаимосвязь между всеми критериями оптимальности. Приведен алгоритм решения задачи нахождения минимума максимального момента завершения выполнения заданий, позволяющего получить расписание, в котором все задания выполняются без запаздывания.

Общая постановка задачи

Рассмотрим свойства и проведем сравнительный анализ следующей задачи календарного планирования по разным критериям оптимальности.

Задано множество заданий J, число приборов m, для каждого задания $j \in J$ известна длительность выполнения p_j. Все задания имеют общий директивный срок d. Предполагается, что все задания множества J поступают одновременно, процесс обслуживания каждого задания можно начать в любой момент времени, он будет протекать без прерываний до завершения обслуживания задания. Все приборы работают без прерываний.

Необходимо построить расписание σ выполнения заданий $j \in J$ на m приборах одинаковой производительности, по следующим критериям оптимальности:

1) минимизация суммарного запаздывания выполнения заданий:

$$F(\sigma) = \sum_{j \in J} \max\left[0; C_j(\sigma) - d\right],$$

где $C_j(\sigma)$ – момент завершения выполнения задания j в расписании σ;

2) найти максимальный момент запуска заданий на выполнение r, позволяющий получить допустимое расписание (расписание, в котором все задания выполняются без запаздывания);

3) построение допустимого расписания с минимальным суммарным опережением времени завершения выполнения заданий, назначенных на каждый прибор, относительно максимального момента завершения заданий $C_{\max}$:

$$E_\Sigma = \sum_{k=1}^{m} E_k = \sum_{k=1}^{m} \left(C_{\max} - C_k\right) \to \min,$$

где C_k – момент завершения выполнения заданий на приборе k,

$C_{\max}$– максимальный из всех C_k, $k = \overline{1, m}$.

В [1] приведены два ПДС-алгоритма решения задачи по критерию 1, которые применяются в зависимости от параметров исходных данных. ПДС-алгоритмы решения задачи включают полиномиальную составляющую и приближенный алгоритм и строятся только на направленных перестановках. Полиномиальная составляющая алгоритма задается детерминированной процедурой последовательного выполнения направленных перестановок, общее количество которых ограничено полиномом от числа заданий и количества приборов. Полином задается исследователем и зависит от допустимого времени вычисления задачи и мощности вычислительного комплекса.

На основании теоретических свойств задачи в [1] определены условия, выполнение любого из которых на допустимом расписании гарантирует его оптимальность. В результате решения задачи получаем либо строго оптимальное решение полиномиальной составляющей алгоритма (если в процессе вычислений удовлетворялось одно из условий оптимальности допустимого расписания), либо приближенное с верхней оценкой отклонения от оптимального.

Утверждение 1. Решение задачи по критерию 2 эквивалентно решению следующей задачи: для произвольного момента запуска приборов получить расписание, у которого максимальное время завершения выполнения работ $C_{\max}$ является минимальным.

Доказательство. Пусть существует расписание с произвольным моментом запуска приборов r. Пусть T_k – сумма длительностей заданий на приборе k :

$$T_k = \sum_{j=1}^{n_k} p_{kj} \ ,$$

где n_k – количество работ, выполняемых на приборе k;

p_{kj} – длительность выполнения j-го задания на приборе k.

Обозначим сумму длительностей на самом загруженном приборе $T_{\max} = \max\limits_{k} T_k, \, k = \overline{1,m}$.

Оптимальным по критерию минимизации $C_{\max}$ будет расписание, удовлетворяющее условию: $T_{\max} \to \min$. Обозначим сумму длительностей на самом загруженном приборе в оптимальном расписании через $T^*_{\max}$, а максимальный момент завершения заданий в оптимальном расписании через $C^*_{\max} = r + T^*_{\max}$, где r – момент запуска приборов. Определим максимальный момент запуска приборов $r = d - T^*_{\max}$. Поскольку $d - T^*_{\max}$ может быть отрицательным числом, то ноль выбирается так, чтобы $d - T^*_{\max}$ было неотрицательным. Максимальный момент запуска приборов в этом случае равен $r = d - T^*_{\max} \geq 0$. Это расписание допустимо и является оптимальным по критерию 2 по построению. Действительно, для любого $r > d - T^*_{\max}$ не существует допустимого расписания.

Следствие. На равномерном расписании достигается абсолютный оптимум функционала по критерию 2.

Теорема 1. Оптимальные решения задач по критериям 2 и 3 совпадают.

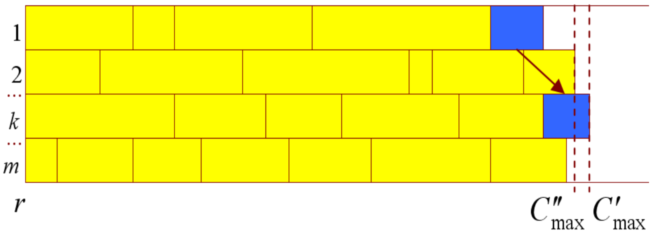

Рис. 1. Гистограмма выполнения заданий

Доказательство. Из двух допустимых расписаний то, у которого максимальный момент окончания выполнения заданий $C_{\max}$ больше ($C'_{\max} > C''_{\max}$, рис. 1: последнее задание перенесено с прибора 1 на прибор k), имеет большее суммарное опережение относительно $C_{\max}$. Действительно, для допустимого расписания E_{Σ} определяется площадью прямоугольника, ограниченного моментом запуска и $C_{\max}$, минус суммарная площадь загрузки приборов (прямоугольники с высотой 1). Так как суммарное время работы приборов для обоих расписаний одинаково, то чем больше $C_{\max}$, тем больше E_{Σ}. В оптимальном по критерию 2 расписании, в соответствии с утверждением 1, $C_{\max}$ минимально и, следовательно, E_{Σ} минимально. Итак, допустимое расписание с максимальным моментом запуска заданий и допустимое расписание с минимальным E_{Σ} совпадают.

Таким образом, для нахождения минимального $C_{\max}$ предлагается следующий приближенный алгоритм.

1) Определяем $d = \sum_{j=1}^{n} p_j \Big/ m$. Решаем для этого директивного срока задачу по критерию 1 при моменте запуска $r = 0$ (получаем расписание σ_0).

2) Задаем некоторый шаг Δ. Получаем расписания по критерию 1 для директивных сроков $d \pm \Delta$, $d \pm 2\Delta$, $d \pm k\Delta$. расписания $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2k}$), где $k\Delta$ существенно меньше d.

3) Выбираем из расписаний $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2k}$ то расписание, для которого $C_{\max}$ является наименьшим. Если в этом расписании $C_{\max}$ мало отличается от $C_{\min}$ (минимального значения момента освобождения прибора), то расписание близко к равномерному, и статистически значимо полу-

чено оптимальное расписание для задачи по критерию 2. Если разница $C_{\max} - C_{\min}$ существенна, то очевидным образом простыми перестановками мы приходим к новому расписанию, в котором увеличивается суммарное запаздывание, но при этом уменьшается максимальная загрузка приборов $C_{\max}$. Новому расписанию, в соответствии с показанным выше, соответствует меньшее, чем у предыдущего, суммарное опережение относительно $C_{\max}$.

4) Момент запуска приборов $r = d - T_{\max}$.

Примечание: решение $2k$ задач для $d \pm \Delta$, $d \pm 2\Delta$, … вызвано тем, что функционал минимизации $C_{\max}$ и минимальное суммарное запаздывание (критерий 1) хотя и коррелированы, но не совпадают. Теоретически минимальному суммарному запаздыванию может соответствовать очень большая максимальная загрузка приборов. В этом случае решением $2k$ задач находим директивный срок, при котором значению функционала по критерию 1 соответствует минимальный $T_{\max}$. В противном случае, путем перестановок уменьшаем $T_{\max}$ и получаем расписание, в котором разность $C_{\max} - C_{\min}$ минимальна.

Вычислительные эксперименты

Предложенный алгоритм нахождения минимального $C_{\max}$ основан на алгоритме решения задачи по критерию 1, и его трудоемкость определяется трудоемкостью алгоритма решения задачи по критерию 1. Для задачи по критерию 1 в [1] были проведены испытания на задачах с размерностью до 40 000 заданий с числом приборов до 30-ти. Вычислительные эксперименты показали, что с увеличением размерности числа заданий увеличивается статистическая вероятность реализации полиномиальной составляющей алгоритма. Были предложены два ПДС-алгоритма: А1 с трудоемкостью $O(n^2 m)$ и А2 с трудоемкостью $O(mn \log n)$. Алгоритм А2 построен на основе анализа эффективности алгоритма А1 и выделения наиболее эффективных перестановок с точки зрения реализации условий оптимальности. Среднее время решения задачи полиномиальной вычислительной схемой А1 не превысило 2,4 с для размерности n до 40 000 заданий и m до 30 приборов (исследования проводились на процессоре Pentium Core 2 Duo с тактовой частотой 3,0 ГГц). Среднее время решения задач той же размерности полиномиальной вычислительной схемой А2 не превысило 35 мс. Средняя частота получения оптимального решения для алгоритма А1 составила 89,2 %, для алгоритма А2 – 74,1 %, причем с возрастанием числа заданий увеличивается статистическая вероятность реализации полиномиальной составляющей алгоритмов. Среднее отклонение от оптимального решения для алгоритма А1 составляло величину 0,000283, для алгоритма А2 – 0,00016. При введении дополнительных типов перестановок алгоритм А2 эффективнее алгоритма А1. При этом оптимальное значение функционала достигается полиномиальной составляющей алгоритма в 92 % случаев.

Выводы

Показано, что:

– решение задачи по критерию 2 эквивалентно решению задачи минимизации $C_{\max}$ для произвольного момента запуска приборов;

– на равномерном расписании достигается абсолютный оптимум функционала по критерию 2;

– решения задач по критериям 2 и 3 совпадают.

Приведен алгоритм решения задачи нахождения минимального $C_{\max}$, основанный на алгоритме решения задачи по критерию 1. Вычислительные эксперименты показали высокую эффективность алгоритма.

Список литературы

1. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография.– К.: Наукова думка, – 2010.– 573 с.