УДК 621.396.946.2

КУЛАКОВ Ю. А.,
ВОРОТНИКОВ В. В.,
ГУМЕНЮК И. В.

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ ПУТЕМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЕЕ ТОПОЛОГИИ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫМ ГРАФОМ

В работе проведен анализ формирования предфрактальных графов телекоммуникационных сетей с использованием свойства самоподобия, а также рассмотрен подход для создания моделей таких сетей. Показано, что различие между топологией реальной сети и её модели в виде предфрактального графа может быть оценено при помощи удаление новых рёбер l- ранговой затравки. Полученные результаты позволяют выделять на структуре реального графа сети фрагменты, которые хорошо описываются предфрактальными графами, а значит, имеют масштабно-инвариантные характеристики.

The paper analyzes the formation prefractal graphs telecommunication networks using the self-similarity property and considered approach to create models of such networks. It is shown that the difference between the actual network topology and its model as predfractal graph can be estimated using the removal of new edges l-rank seed. The results are used to distinguish the structure of the real network graph fragments, which are well described prefractal graph, and thus have a scale-invariant characteristics.

1. Постановка проблемы

Современные вычислительные системы и телекоммуникационные сети могут состоять из большого количества узлов и связей. В связи с этим возрастают трудности проектирования топологии таких систем, что связано с недостаточно развитой математической и инструментальной базой для поиска оптимальных решений. Проблема состоит в том, что при решении такого рода задач оптимизацию приходится выполнять на весьма непростых комбинаторных объектах – графах связей с большим количеством вершин и ребер, а комбинаторно-переборный характер задач не позволяет получить точное решение, возникающих при этом задач большой размерности [1].

Если представить сложную сеть в виде фрактала с циклически повторяющимися структурами, то задача моделирования их структуры сводится к определению момента фазового перехода диссипативных топологических структур сети, с последующим созданием модельных объектов с фрактальной структурой и изучением их геометрических характеристик [1, 2].

В связи с этим задача создания математических методов и программных инструментальных средств построения больших графов с прогнозируемыми параметрами становится все более актуальной.

2. Анализ последних исследований и публикаций

Существует большой класс задач для решения которых требуется обработка сложных дискретных структур. Задачи, связанные со сложными структурами, возникают в теории перколяции [3], в теории многоуровневых иерархических систем [4], [5], в моделировании глобальных структур [6] и т. д. Структуры, которые не проектируются специальным образом, в большинстве своем обладают свойством самоподобия [8]. Такие структуры называют фрактальными [9].

Целью работы является представление топологии реальной сети с помощью графа, имеющего свойства самоподобия фрактала.

3. Формулировка задачи исследования

Пусть $G=(V,E)$- неориентированный граф, который описывает топологию заданной сети, где V - вершины графа, E -ребра графа.

Для построения фрактального (предфрактального) графа определено множество структур графа, состоящих из различного числа элементов, которые могут быть использованы в качестве затравки $H=(W,Q)$, W- вершины сегмента графа затравки, Q - ребра сегмента графа затравки.

Необходимо:

1) у намеченной для замещения вершины $\widetilde{v} \in V$ выделить множество, смежных ей вершин $\widetilde{V} = \{\widetilde{v}_j\} \subseteq V$;

2) каждую вершину $\widetilde{v}_j \in \widetilde{V}$ соединить ребром с одной из вершин затравки $H = (W, Q)$;

3) используя рекурсивно операцию замены вершин затравкой H в l этапов, необходимо сформировать фрактальный граф.

Введем ограничения:

1) размеры элементов структур $H = (W, Q)$ различны;

2) вершины соединяются случайным образом или по определенному принципу самоподобия.

Отличие топологии реальной сети и ее предфрактального графа необходимо оценить как разницу структур: графа $G = (V, E)$ реальной сети и полученного фрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ ее модели.

4. Изложения основного материала

Фрактальные графы определяются как объединение графа и фрактала, с присущими свойствами фракталов: самоподобием, дробной размерностью, масштабной инвариантностью и т. д. [4, 13].

Фрактальные графы строятся иерархически: вершина графа вышестоящего уровня раскрывается в виде графа, подобного вышестоящему [10]. Процесс раскрытия уровня еще называют затравкой вершины графа.

В литературе термином «затравка» принято называть какой-либо связный граф $H = (W, Q)$. Для определения предфрактального графа [10] выполняют операцию замены вершины затравкой, суть которой заключается в следующем.

Предфрактальный граф обозначим через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L – множество его ребер. Определим его рекуррентно, заменяя в построенном на предыдущем этапе графе $G_l = (V_l, E_l)$ каждую его вершину затравкой $H = (W, Q)$.

На этапе $l = 1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1 = H$. Фрактальный граф $G = (V, E)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, определяется бесконечной траекторией [10].

Использование операции замены вершины затравкой в процессе формирования предфрактального графа G_L, для элементов $G_l = (V_l, E_l)$, $l \in \{1..L-1\}$, его траектории позволяет ввести в общем виде отображение:

$$\varphi^t(V_l) = V_{l+t}, \tag{1}$$

где множество V_l – прообраз множества V_{l+t}.

Для предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, ребра, появившиеся на l-ом этапе порождения, будем называть ребрами ранга l.

Если из предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного n-вершинной затравкой $H = (W, Q)$, последовательно удалить все старые ребра (ребра ранга l), то исходный граф распадется на множество связных компонент $\{B_L^{(1)}\}$, каждая из которых изоморфна [11] затравке $H = (W, Q)$.

При удалении из предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ всех ребер рангов $l = 1..L - r$ получим множество $\{B_{L,i}^{(r)}\}$. Очевидно, что всякий блок $B_L^{(r)} = (U_L^{(r)}, M_L^{(r)})$ является предфрактальным графом $B_r = (U_r, M_r)$, порожденным затравкой $H = (W, Q)$.

Для любой вершины из траектории предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ справедливо:

$$\varphi^t(v_j) = U_{L+t,j}^{(t)},\ \varphi^t(v_j) = B_{l+t,j}^{(t)}, \tag{2}$$

где $B_{L+t,j}^{(t)} = \left(U_{L+t,j}^{(t)}, M_{l+t,j}^{(t)}\right) \subseteq G_{l+t}$.

Аналогично,

$$\varphi^t\left(U_{l,i}^{(r)}\right) = U_{l+t,i}^{(r+t)},\ \varphi^t\left(B_{L,i}^{(r)}\right) = B_{L+t,i}^{(r+t)}, \tag{3}$$

где $r \in \{1..L-t\}$, $i \in \{1..n^{L-r}\}$.

Обобщением описанного процесса формирования предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ является такой случай, когда вместо единственной затравки $H = (W, Q)$ используется множество затравок.

На рис. 1 жирными линиями обозначены ребра затравки 1-го ранга. Линии средней толщины - ребра затравок 2-го ранга, а тонкими линиями соответственно изображены ребра затравок 3-го ранга.

При формирования предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ производится ровно $\dfrac{n^L - 1}{n - 1}$ операций замены вершины затравкой. При необходимости можно убедиться в том, что каждая операция приносит графу $G_L = (V_L, E_L)$ по $(k_H - 1)$-ой внутренней грани.

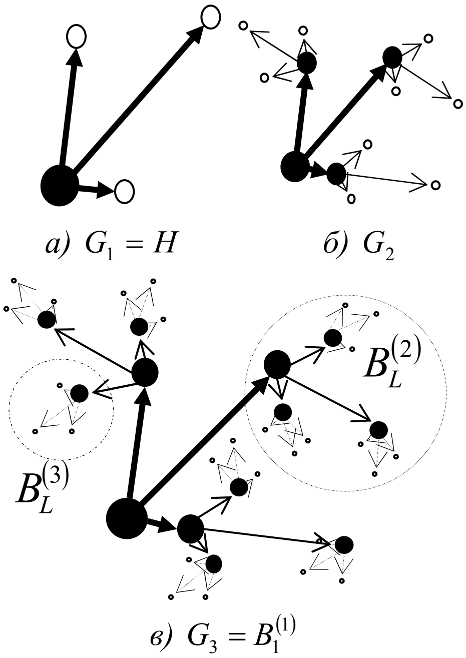

Рис. 1. Предфрактальные графы, порожденные затравкой 3-го ранга

Поэтому общее число $(k_H - 1)\dfrac{n^L - 1}{n - 1}$ внутренних граней предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ в сумме с одной внешней гранью дают формулу:

$$k_{G_L} = 1 + (k_H - 1)\frac{n^L - 1}{n - 1}. \qquad (4)$$

Для предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного множеством затравок, через $k_{\min} = \min\limits_{t=2,T} k_{H_t}$, $k_{\max} = \max\limits_{t=2,T} k_{H_t}$ обозначим минимальное и максимальное число граней среди затравок из множества $\mathrm{H} = \{H_t\}$, где t - количество затравок, применяемых для покрытия моделируемого графа.

Число граней k_{G_L} предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного множеством затравок, ограничено двойным неравенством:

$$(k_{\min} - 1)\frac{n^L - 1}{n - 1} \le k_{G_L} - 1 \le (k_{\max} - 1)\frac{n^L - 1}{n - 1}. \qquad (5)$$

Отметим, что правая часть неравенства (5) достигается, когда при формировании предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ участвует только одна затравка из множества $\mathrm{H} = \{H_t\}$ с числом граней равным $k_{\max}$. Левая часть (5) достигается, когда предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожден затравкой $\mathrm{H} = \{H_t\}$ с минимальным числом граней $k_{\min}$.

Пример. Построим модель топологии сети в виде предфрактального графа. Пусть сеть задана графом (рис. 2), которой не является канонически фрактальным.

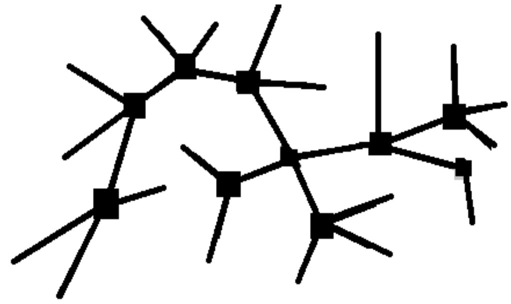

Рис. 2. Пример топологии сети

Выделим связный граф, который будет затравкой для исходного предфрактального графа (рис. 3).

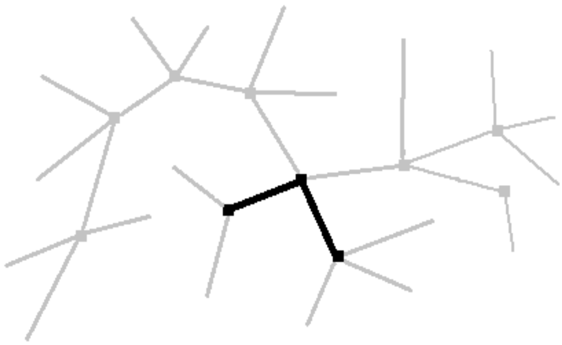

Рис. 3. Затравка предфрактального графа

Используя операцию замены вершин затравкой, суть которой описана выше, по принципу самоподобия получаем предфрактальный граф соответствующего ранга.

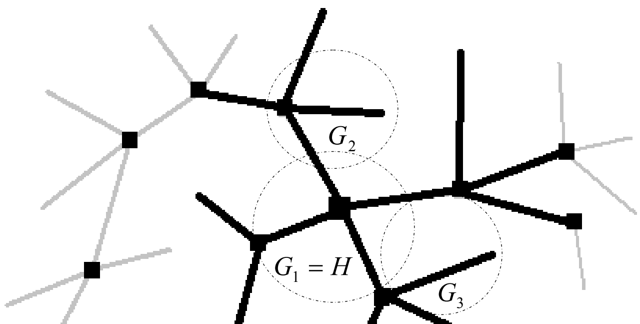

Рис. 4. Схема формирования предфрактального графа

Стоит отметить, что при порождении 3-ранговой затравкой предфрактального графа последовательно удаляются старые ребра. Это видно из области G_3. Для порождения конечного предфрактального графа необходимо провести 4 операций замены вершин затравкой.

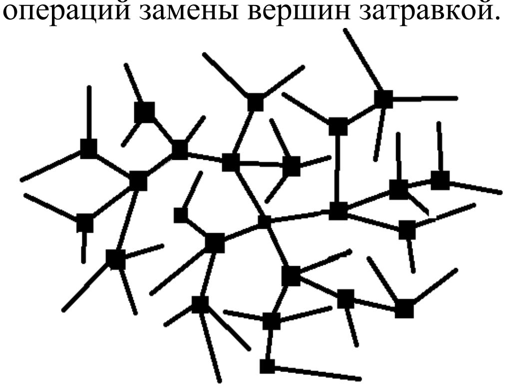

Рис. 5. Результат операций замены вершин графа затравкой H_t

В соответствии с (4-6) было получено значения минимального и максимального количества граней предфрактального графа, которое можно получить путем замены вершин реального графа затравкой из $H = (W, Q)$. Для нашего случая при $k_{\min} = 2$ и $k_{\max} = 4$ зависимость количества граней k_{G_L} от ранга l приведена на рис. 6.

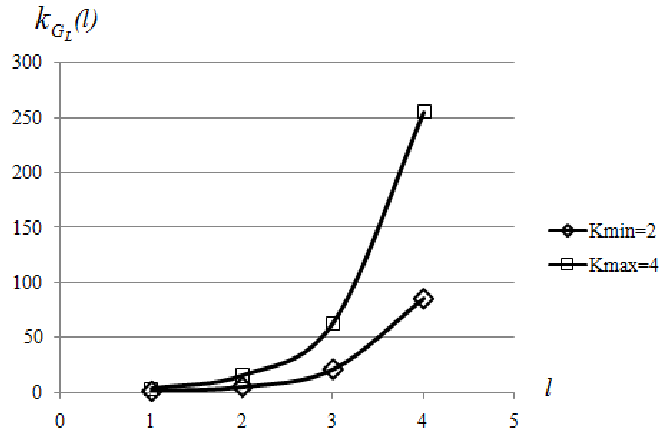

Рис. 6. Зависимость количества граней k_G от ранга l

Анализ зависимости (рис. 6) свидетельствует о том, что для реального графа сети (рис. 2), состоящего из 9 узлов и 29 ребер, при использовании трехузловой затравки (рис. 3), для построения модели топологии в виде предфрактального графа необходимо выполнение четырех рекурсивных процедур замещения узлов реальной сети затравкой H_1.

Построенный предфрактальный граф имеет 25 узлов, соединенных 62 ребрами.

Для приведения предфрактального графа к модели топологии реальной сети (рис. 7) из его структуры удалены лишние узлы и ребра.

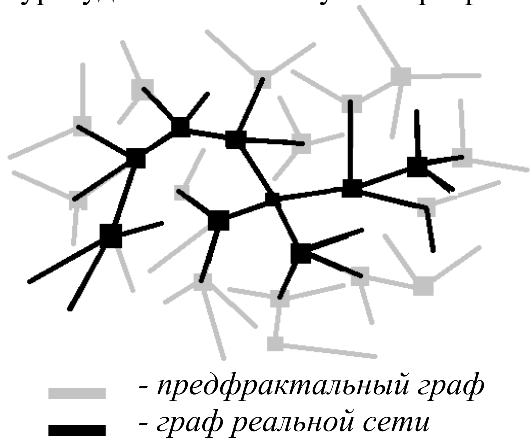

Рис. 7. Предфрактальный граф

5. Выводы

Анализ сложной сети путем представления ее структуры в виде фрактала с циклически повторяющимися структурами существенно снижает трудоемкость решения задач, связанных со сложными структурами и системами в целом.

В качестве элементов предфрактального графа можно рассматривать его подграфы-затравки или, в зависимости от постановки задачи, блоки различных рангов. Причем установленные правила соединения подграфов-затравок при помощи старых ребер, позволяют говорить о наличии (или об отсутствии) у моделируемых графов фрактальных свойств.

Список литературы

1. Корнеев В. В. Архитектура вычислительных систем с программируемой структурой / В. В. Корнеев. – Новосибирск: Наука. – 1985. – 168 с.
2. Корнеев В.В. Параллельные вычислительные системы / Корнеев В.В. – М.: Нолидж. – 1999. – 320 с.
3. Charles J. Colbourn. Combinatorial Models and Network Reliability // [Электронный ресурс]:/ J. Colburn – 6-th International WorkShop on Design of Reliable Communication Networks: DRCN, La Roshelle, France. – 09 October 2007. – Режим доступу до ресурсу: http://www.drcn.org/drcn07/ keynotes/ colburn.pdf.
4. С. Уэлстид. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений. Учебное пособие: – М.: Изд-во Триумф. – 2003. – 320 с.
5. Месарович М. Теория иерархических многоуровневых систем. / М. Месарович, Д. Мако, И. Такахара // – М.: Мир. – 1973. – 346 с.

6. Munzner T. Interactive Visualization of Large Graphs and Networks. /Tamara Munzner [Электронный ресурс]: Ph. D. Thesis Defense. Stanford Univ., 10 april 2000. – http://www.graphics.stanford.edu/~munzner/talks/defense/sld001.htm
7. Сомик К. В. Связные информационные структуры. /К. В. Сомик – М.: Финансы и статистика. – 2005. – 176 с.
8. Бобылева Е.В. Алгоритмы распознавания графов на предфрактальность / Е. В. Бобылева // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – 2003. – №11. – С. 9 – 15.
9. Турчин В. Ф. Феномен науки. Кибернетический подход к эволюции. / В. Ф. Турчин. – М.: ЭТС. – 2000. – 420 с.
10. Кочкаров А.А. Предфрактальные графы в проектировании и анализе сложных структур. / А. А. Кочкаров, Р. А. Кочкаров // [Электронный ресурс]: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – Москва. – 2003. – Режим доступу до ресурсу: http://www.keldysh.ru/papers/2003/prep10/prep2003_10.html.
11. В. А. Емеличев. Лекции по теории графов / Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. // – М.: Наука. – 2013. – 392 с. – ISBN: 978-5-397-03289-6
12. Щербина О. А. Методологические аспекты динамического программирования / О. А. Щербина // Динамические системы. – 2007. – № 22. — С. 21 – 36.
13. Роновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории: пер. с англ. / Р. М. Роновер. – М.: Изд-во Постмаркет. – 2000. – 340 с.