УДК 681.3.042

ФЕДОТОВА-ПИВЕНЬ И.Н.,
ПИВЕНЬ О.Б.

ПРОГРАММНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕЩЕННОГО ВО ВРЕМЕНИ СЛОЖЕНИЯ ДВАДЦАТИ ЦЕЛЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ИЗБЫТОЧНОЙ РЕКУРРЕНТНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В статье в рамках программных моделей рассмотрены сравнения быстродействий совмещенного во времени сложения 20-ти целых положительных 32-/16-разрядных чисел в избыточной рекуррентной системе счисления третьего порядка с алфавитом {0, 1}, образованной линейным рекуррентным соотношением $B_n=B_{n-1}+3B_{n-3}+2B_{n-4}$ с начальными значениями 1 1 1 1 2 4 8 и поочередного сложения 20-ти целых положительных 32-/16-разрядных двоичных чисел по стандартному алгоритму Уоллеса.

In an article in the framework of program models examined compare the performance of coincident in time addition of twenty positive integers 32-/16-bit numbers in the redundant recurrent numeration system of the third order created by the linear recurrence relation $B_n=B_{n-1}+3B_{n-3}+2B_{n-4}$, with starting values 1 1 1 1 2 4 8 and addition by turns of twenty integer positive 32-/16-bit binary numbers on a standard algorithm of Wallace.

1. Введение

Постановка проблемы. Повышение производительности и достоверности вычислений в компьютерных системах, включающее повышение быстродействия и обеспечение высокого уровня их надежности, является одной из важнейших задач современной цифровой электроники.

Для решения этой задачи предусматривается применение аппаратной и информационной избыточности, а следовательно и использование избыточных систем счисления (ССЧ) [1]. Благодаря множественности кодовых представлений одного и того же числа в избыточной системе счисления появляется возможность распараллеливания вычислений [2] и увеличение быстродействия арифметических устройств. Также, одним из возможных способов повышения скорости вычислений, выполняемых над большими объемами числовых данных, является использование совмещенного во времени выполнения операций [3]. Поэтому совмещенное выполнение операций можно применить для решения проблемы многооперандного сложения. Многооперандное сложение является фундаментальной проблемой [4,5], так как с увеличением числа операндов растет логическая сложность сумматора [6]. Таким образом, создание более быстрых алгоритмов совмещенного во времени многооперандного сложения в избыточных ССЧ является актуальной задачей.

Анализ последних исследований и публикаций. Разновидностью избыточных ССЧ являются линейные избыточные рекуррентные системы счисления (ЛИРСЧ). В работе [7] был разработан программный комплекс генерации систем счисления с правилами совмещенного сложения (ССЛ) в них до 5-ти включительно слагаемых с использованием структурно-блочных кодов (СБК). Оказалось, что наиболее простые правила ССЛ до 5-ти слагаемых включительно (k ⊂(2; 3; 4; 5)) имеет ССЧ с алфавитом {0, 1}, образованная линейным рекуррентным соотношением (ЛРС)

$$B_n=B_{n-1}+3B_{n-3}+2B_{n-4} \qquad (1)$$

и начальными значениями 1 1 1 1 2 4 8 (НЗ) (т.е. $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 1$, $B_3 = 1$, $B_4 = 2$, $B_5 = 4$, $B_6 = 8$), для которой выполняются следующие правила ССЛ:

$$\begin{cases} 0+0=0; \\ \mathrm{B_n}+0=B_n; \\ 2\mathrm{B_n}=B_{n+1}; \\ 3\mathrm{B_n}=B_n+B_{n+1}; \\ 4\mathrm{B_n}=B_{n+2}; \\ 5\mathrm{B_n}=B_n+B_{n+2}; \end{cases} \qquad (2)$$

Но вопрос совмещенного сложения более 5-ти двоичных слагаемых в этой ССЧ не рассматривался.

2. Постановка задачи.

С использованием СБК создать программную модель совмещенного сложения 20-ти целых положительных 32-/16-разрядных чисел в ЛИРСЧ 3-го порядка, образованной ЛРС $B_n=B_{n-1}+3B_{n-3}+2B_{n-4}$ с НЗ, с алфавитом {0, 1} и сравнить ее быстродействие с быстродействием программной модели поочередного сложения 20-ти целых положительных 32-/16-разрядных двоичных чисел по алгоритму Уоллеса.

3. Доказательство правил совмещенного во времени сложения в избыточной рекуррентной системе счисления третьего порядка.

В [8] рассмотрен метод поочередного сложения 12-ти слагаемых с использованием дерева Уоллеса (рис.2 из [8]). При этом использовано 11 цифровых компрессоров типа 3:2 и один быстрый сумматор с распространением переноса (CPA - carry propagate adder) [8]. Используются методы оптимизации (теория графов) [9,10] для минимизации числа цифровых компрессоров и связей между ними для поочередного сложения более 3-х слагаемых. По аналогии с рис. 2 из [8] создадим дерево Уоллеса поочередного сложения 20-ти слагаемых и используем его для сравнения быстродействия совмещенного и поочередного сложения 20-ти слагаемых :

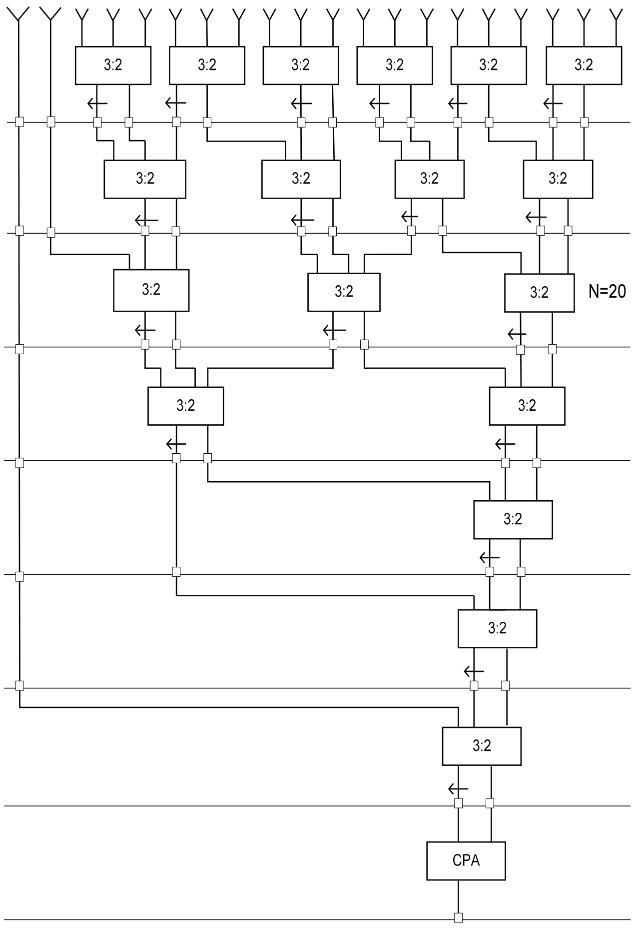


Рис.1. Поочередное сложение 20-ти слагаемых с использованием дерева Уоллеса по аналогии с рис. 2 из [8].

Из рис.1 видно, что для поочередного сложения 20-ти слагаемых используется 18 цифровых компрессоров типа 3:2 и один быстрый сумматор с распространением переноса.

Используя возможность совмещенного сложения, программный комплекс [7] был усовершенствован для получения ССЧ, в которых возможно совмещенное во времени сложение до 20-ти слагаемых включительно ($k \subset (2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20)$). Оказалось, что наиболее простые правила совмещенного сложения до 20-ти слагаемых включительно (3) имеет ССЧ, созданная ЛРС (1) с начальными значениями НЗ при $n \geq 7$.

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0; \\ B_n = B_n + 0; \\ 2B_n = B_{n+1}; \\ 3B_n = B_n + B_{n+1}; \\ 4B_n = B_{n+2}; \\ 5B_n = B_n + B_{n+2}; \\ 6B_n = B_{n+1} + B_{n+2}; \\ 7B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+2}; \\ 8B_n = B_{n+3}; \\ 9B_n = B_n + B_{n+3}; \\ 10B_n = B_{n+1} + B_{n+3}; \\ 11B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+3}; \\ 12B_n = B_{n+2} + B_{n+3}; \\ 13B_n = B_n + B_{n+2} + B_{n+3}; \\ 14B_n = B_{n+1} + B_{n+2} + B_{n+3}; \\ 15B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+2} + B_{n+3}; \\ 16B_n = B_{n+4}; \\ 17B_n = B_n + B_{n+4}; \\ 18B_n = B_{n+1} + B_{n+4}; \\ 19B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+4}; \\ 20B_n = B_{n+2} + B_{n+4}; \end{cases} \qquad (3)$$

Докажем правила сложения (3) для ССЧ, заданной ЛРС (1) и НЗ. В работе [11] для ЛИРСЧ 3-го порядка (1) доказано правила совмещенного сложения до 5-ти слагаемых включительно (т.е. первые 6 равенств системы (3)). Докажем правила совмещенного сложения до 20-ти слагаемых включительно в ЛИРСЧ, заданной ЛРС (1) и НЗ, т.е. последние 15 равенств системы (3).

Доказательство. Седьмое правило в системе (3), $6B_n=B_{n+1}+B_{n+2}$ получается из правила 4 так: $6B_n=2 \cdot 3B_n = 2B_n + 2B_{n+1}$. По правилу 3 имеем: $2B_n = B_{n+1}$ и $2B_{n+1} = B_{n+2}$. Подстановка этих двух равенств вместо $2B_n$ и $2B_{n+1}$ в 6Bn дает правило 7. Правило 8 получается из 7-го: $7B_n = 6B_n + B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+2}$. Правило 9 получается из 8-го так: $8B_n = B_n + B_n + B_{n+1} + B_{n+2}$. По правилу 3 имеем: $2B_n = B_{n+1}$, $2B_{n+1} = B_{n+2}$ і $2B_{n+2} = B_{n+3}$. Последовательное применение этих равенств дает: $8B_n = B_{n+1} + B_{n+1} + B_{n+2} = B_{n+2}+ B_{n+2} = B_{n+3}$. Правило 10 получается из 9-го: $9B_n = 8B_n + B_n = B_n + B_{n+3}$. Правило 11 получается из 10-го так:

$10B_n = B_n + B_n + B_{n+3}$. По правилу 3 имеем: $2B_n = B_{n+1}$. Поэтому $10B_n = B_{n+1} + B_{n+3}$. Правило 12 получается из 11-го так: $10B_n + B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+3}$. Поэтому $11B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+3}$. Правило 13 получается из 12-го так: $12B_n = 2B_n + B_{n+1} + B_{n+3}$. По правилу 3 имеем: $2B_n = B_{n+1}$ и $2B_{n+1} = B_{n+2}$. Подстановка этих двух равенств вместо $2B_n$ и $2B_{n+1}$ в $12B_n$ дает правило 13: $12B_n = B_{n+2} + B_{n+3}$. Правило 14 получается из 13-го так: $12B_n + B_n = B_n + B_{n+2} + B_{n+3}$. Поэтому $13B_n = B_n + B_{n+2} + B_{n+3}$. Правило 15 получается из 14-го так: $13B_n + B_n = 2B_n + B_{n+2} + B_{n+3}$. По правилу 3 имеем: $2B_n = B_{n+1}$. Поэтому
$14B_n = B_{n+1} + B_{n+2} + B_{n+3}$. Правило 16 получается из 15-го так: $14B_n + B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+2} + B_{n+3}$. Поэтому
$15B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+2} + B_{n+3}$. Правило 17 получается из 16-го так: $15B_n + B_n = B_n + B_n + B_{n+1} + B_{n+2}$. По правилу 3 имеем: $2B_n = B_{n+1}$, $2B_{n+1} = B_{n+2}$, $2B_{n+2} = B_{n+3}$ и $2B_{n+3} = B_{n+4}$. Последовательное применение этих равенств дает: $16B_n = 2B_n + B_{n+1} + B_{n+2} + B_{n+3} = B_{n+1} + B_{n+1} + B_{n+2} + B_{n+3} = 2B_{n+1} + B_{n+2} + B_{n+3} = B_{n+2} + B_{n+2} + B_{n+3} = 2B_{n+2} + B_{n+3} = B_{n+3} + B_{n+3} = B_{n+4}$. Правило 18 получается из 17-го так: $16B_n + B_n = B_n + B_{n+4}$. Поэтому $17B_n = B_n + B_{n+4}$. Правило 19 получается из 18-го так: $17B_n + B_n = 2B_n + B_{n+4}$. По правилу 3 имеем: $2B_n = B_{n+1}$. Поэтому $18B_n = B_{n+1} + B_{n+4}$. Правило 20 получается из 19-го так: $18B_n + B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+4}$. Поэтому $19B_n = B_n + B_{n+1} + B_{n+4}$. Правило 21 получается из 20-го так: $20B_n = 19B_n + B_n = 2B_n + B_{n+1} + B_{n+4}$. По правилу 3 имеем: $2B_n = B_{n+1}$ и $2B_{n+1} = B_{n+2}$. Подстановка этих двух равенств вместо $2B_n$ и $2B_{n+1}$ в $20B_n$ дает правило 21: $20B_n = B_{n+1} + B_{n+1} + B_{n+4} = 2B_{n+1} + B_{n+4} = B_{n+2} + B_{n+4}$. Этим систему правил совмещенного сложения (3) для ЛИРСЧ (1) с НЗ доказано.

4. Программная модель сравнения быстродействия совмещенного во времени сложения в избыточной рекуррентной системе счисления третьего порядка.

Для сравнения быстродействия совмещенного сложения 20-ти целых положительных 32-/16-разрядных чисел в ЛИРСЧ 3-го порядка, образованной ЛРС (1) с НЗ 1 1 1 1 2 4 8, алфавитом {0, 1} с быстродействием поочередного сложения 20-ти целых положительных 32-/16-разрядных двоичных чисел по часто используемому алгоритму Уоллеса создадим программную модель с помощью электронных таблиц Excel 2003 и встроенного языка программирования VBA.

Совмещенное во времени сложение до 20-ти целых положительных n - разрядных слагаемых включительно в ЛИРСЧ 3-го порядка с алфавитом {0, 1}, образованной ЛРС (1) с НЗ и по правилам (3) увеличивает разрядность суммы до n + 5 разрядов.

На рис. 2 приведен алгоритм программной модели совмещенного сложения 20-ти слагаемых в ЛИРСЧ 3-го порядка с алфавитом {0, 1} и НЗ, сгенерированной ЛРС (1) и алгоритм программной модели поочередного сложения 20-ти слагаемых в обычной двоичной ССЧ по алгоритму Уоллеса. Прямое применение правил совмещенного сложения (3) в ЛНРСЧ показано на рис. 2 в виде первого блока операторов, обведенного пунктиром. Моделирование работы сумматора с распространением переноса показано на рис. 2 в виде второго блока операторов, обведенного пунктиром. При моделировании работы сумматора с распространением переноса использована формула [12]:

$$B_n = \sum_{m=k}^{n-1} B_m + B_k , \qquad (4)$$

где $k \geq 0$; $k \leq m \leq n - 1$; $n \geq 7$; $B_k \neq 0$.

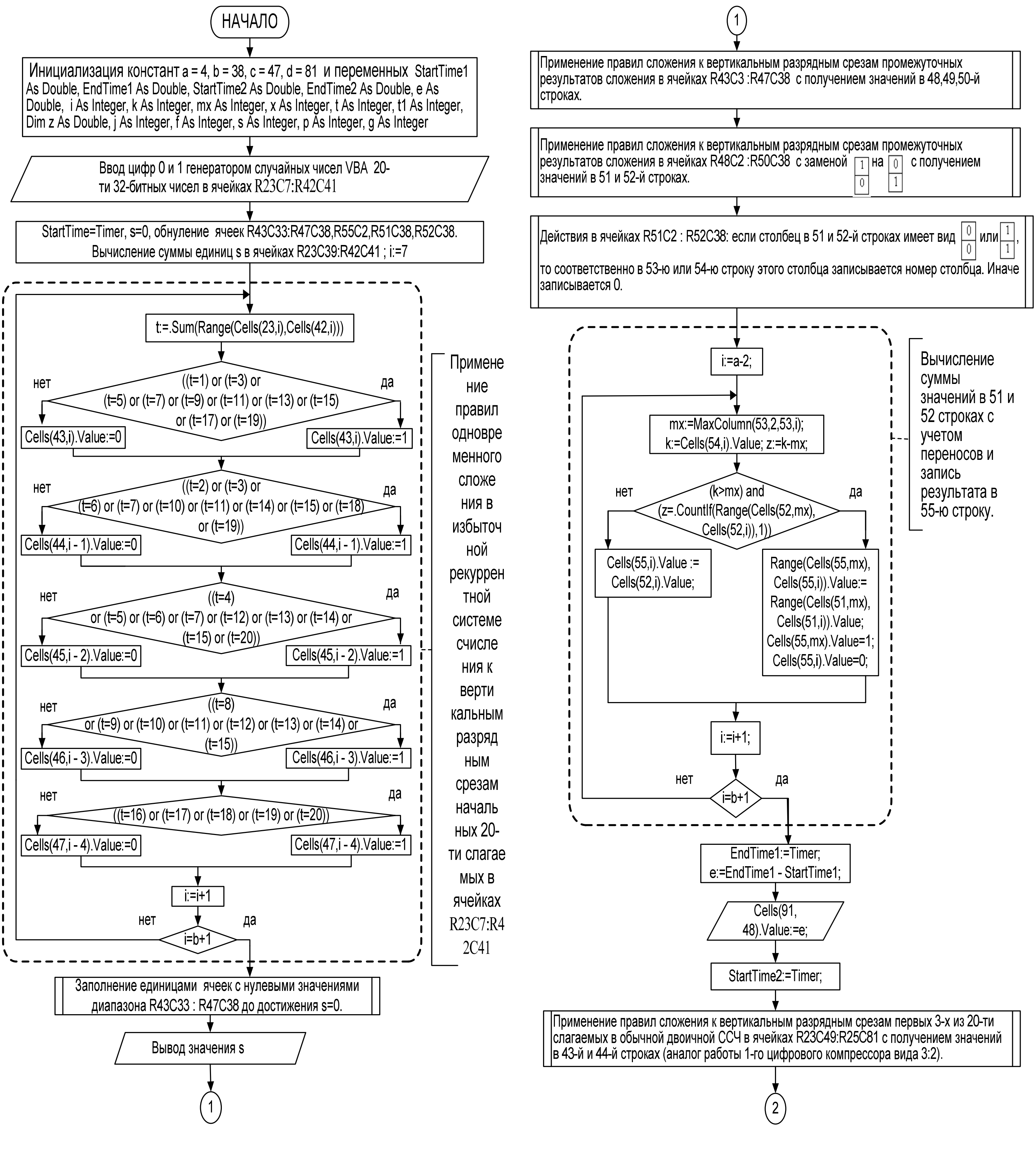
Сравнение скоростей вычисления суммы 20-ти слагаемых в обоих представленных в Excel моделях многооперандного сложения показало, что модель сложения в ЛИРСЧ для 32-разрядных целых положительных чисел требует меньше вычислений и на 73% быстрее, чем модель сложения в обычной двоичной ССЧ по алгоритму Уоллеса (определено как среднее значение времени вычисления суммы на 400 наборах по 20 случайных 32-разрядных слагаемых в каждом).

Сравнение скоростей вычисления суммы 20-ти слагаемых в этих же программных моделях, скорректированных для 16-разрядных целых положительных чисел показывает, что модель сложения в ЛНРСЧ на 73% быстрее, чем модель сложения в обычной двоичной ССЧ по алгоритму Уоллеса (определено как среднее значение времени вычисления суммы на 400 наборах по 20 случайных 16-разрядных слагаемых в каждом).

Во время вычисления суммы слагаемых в ЛИРСЧ происходит перевод результата в обычную двоичную ССЧ и полученный результат может быть использован без дополнительных преобразований в следующих вычислениях.

В программных моделях совмещенного сложения в ЛИРСЧ 3-го порядка 20-ти целых положительных слагаемых как для случая только 32-разрядных слагаемых, так и для случая только 16-разрядных слагаемых необходимо в 3,1 раза меньше ячеек памяти для хранения промежуточных результатов вычислений, чем в соответствующих программных моделях поочередного сложения в обычной двоичной ССЧ по алгоритму Уоллеса.

Итак, простые правила сложения (3) определяют метод совмещенного сложения до 20-ти слагаемых включительно в ЛИРСЧ 3-го порядка (1) при $n \geq 7$ с НЗ 1 1 1 1 2 4 8.



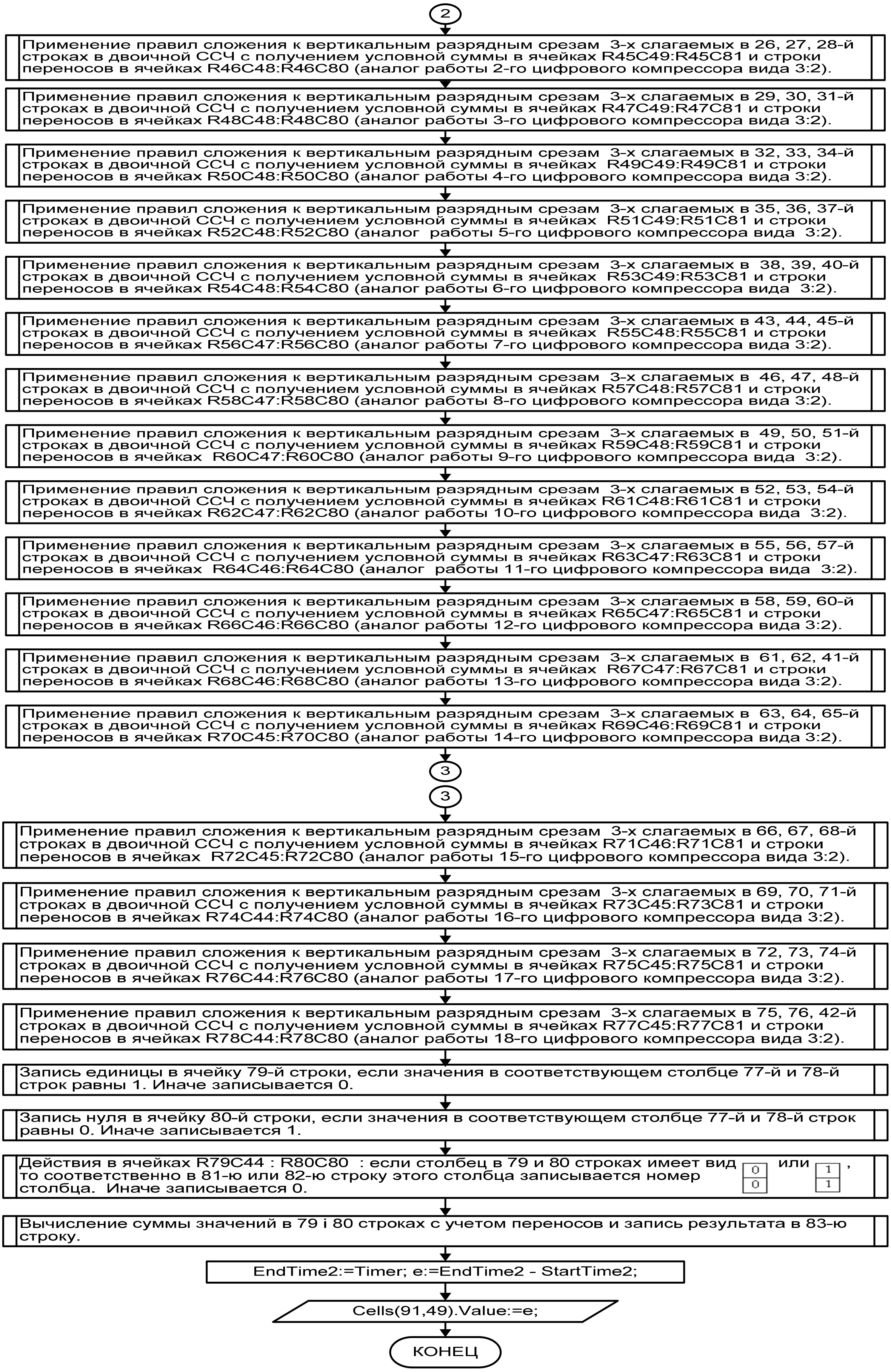


Рис. 2. Алгоритм программной модели совмещенного сложения 20-ти целых положительных 32-разрядных чисел в ЛИРСЧ 3-го порядка с алфавитом {0, 1} и НЗ 1 1 1 1 2 4 8, сгенерированной ЛРС (1) и алгоритм программной модели поочередного сложения 20-ти 32-разрядных слагаемых в обычной двоичной ССЧ.

Выводы

В результате проведенных исследований с использованием СБК определено, что модель совмещенного во времени сложения 20-ти слагаемых в ЛИРСЧ 3-го порядка с алфавитом {0, 1}, сгенерированной рекуррентным соотношением $B_n = B_{n-1} + 3B_{n-3} + 2B_{n-4}$ с НЗ 1 1 1 1 2 4 8 для 32-разрядных целых положительных чисел, требует меньше вычислений и на 73% быстрее, чем модель сложения в обычной двоичной ССЧ по алгоритму Уоллеса. Скорректированная для 16-разрядных целых положительных чисел модель совмещенного во времени сложения 20-ти слагаемых в этой же ЛИРСЧ на 79% быстрее, чем модель сложения в обычной двоичной ССЧ по алгоритму Уоллеса.

В программных моделях совмещенного сложения в ЛИРСЧ 3-го порядка 20-ти целых положительных слагаемых как для случая только 32-разрядных слагаемых, так и для случая только 16-разрядных слагаемых необходимо в 3,1 раза меньше ячеек памяти для хранения промежуточных результатов вычислений, чем в соответствующих программных моделях поочередного сложения в обычной двоичной ССЧ по алгоритму Уоллеса.

Практическое внедрение этой ЛИРСЧ необходимо проводить в зависимости от аппаратных возможностей и требований проектирования при условии повышения контролирующих свойств кодов. Эта ЛИРСЧ может быть использована на практике для более быстрой работы цифровых фильтров.

Список литературы

1. Брюхович Е. И. Экономическая стратегия разработки вычислительных систем: место и роль счислений. // Управляющие системы и машины. Научно-производственный журнал. №2 (106), 1990, февраль. – Институт кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, с. 3-18.
2. A.Mignotte, J.M. Muller, O.Peyran. Synthesis for mixed arithmetic. //Ecole Normale Superieure de Lyon, Laboratoire de l'Informatique du Parallelisme, Unite de recherche associee au CNRS n° 1398, November, 1997, Research Report N° 97-41, pp. 1-24. или http://lara.inist.fr/bitstream/2332/689/ 1/LIP-RR1997-41.pdf
3. Лебедев С. А. Электронно-вычислительные машины / С. А. Лебедев // Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства. Пленарные заседания. – М.: АН СССР. –1957.–Т. 1.–С. 162–180.
4. Chi-Hsiang Yeh, Benrooz Parhami. Efficient pipelined multi-operand adders with high throughput and low latency: designs and applications. Proc. 30th Asilomar Conf. Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, 3-6 November 1996, pp. 894-898.
5. Мартинюк Т. Б. Рекурсивні алгоритми багатооперандної обробки інформації: [Монографія] / Т. Б. Мартинюк - Вінниця: "Універсум-Вінниця", 2000. -216 с. - ISBN 966 – 7199 – 98 - 3.
6. Wallace C.S. A suggestion for a fast multiplier. IEEE Transactions on Electronic Computers, C-13(2), February 1964, pp.14-17.
7. В.М Рудницький, І.М.Федотова-Півень. Метод підвищення швидкодії арифметичних пристроїв за рахунок суміщеного виконання операцій в структурно-блокових кодах./Системи обробки інформації. Збірник наукових праць. 2009, вип.4(78), с.117-119.
8. Martinez M. On the design of FPGA-based multioperand pipeline adders / M. Martinez, J. Valls, E. Boemo // Proceedings of the XII Design of Circuits and Integrated Systems Conference (DCIS'97). – Universidad de Sevilla, Seville, Spain, November 18-21, 1997. – P. 701-706.
9. Ienne P., Verma A.K. Arithmetic transformations to maximise the use of compressor trees. Second IEEE International Workshop on Electronic Design, Test and Applications, DELTA 2004, Perth, Australia, 28-30 January, pp.219-224.
10. Um J., Kim T., Liu C.L. Optimal allocation of carry-save adders in arithmetic optimization. 1999 InternationaL Conference on Computer Aided Design (ICCAD'99), San Jose, CA, 7-11 November, 1999, pp.410-413.
11. В.М. Рудницький, І.М. Федотова-Півень. Моделювання суміщеного додавання до п'яти доданків в надлишковій рекурентній системі числення 3-го порядку. //Системи управління, навігації та зв'язку. 2011, вип. 2(18), С.164-166.
12. В.М. Рудницький, І.М. Федотова-Півень. Програмна модель одночасного додавання п'яти додатніх цілих чисел в надлишковій рекурентній системі числення 3-го порядку. //Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України. 2011, вип. 2(6), С.158-161.