УДК 519.854.2

*ПАВЛОВ А.А.*

# ПРИЗНАКИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ТРУДНОРЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В статье для нескольких видов труднорешаемых одноэтапных задач теории расписаний формулируются признаки оптимальности допустимого решения – теоретические основы построения для этих задач полиномиальной составляющей ПДС-алгоритмов.

In the article for several types of intractable single-stage scheduling problems the optimality signs of a feasible solution are formulated which are the theoretical basis for the construction the polynomial component of the PDC-algorithms for these problems.

## Введение

Большая часть дискретных математических моделей, построенных для анализа, синтеза и функционирования сложных систем, является либо *NP*-полными, либо не проще, чем *NP*-полные задачи. В частности, большинство задач теории расписаний принадлежат этому классу [1]. Анализ трудностей, возникающих при вычислениях на пути создания эффективных методов решения такого рода задач, привел к следующей проблеме: можно ли исключить перебор всех или почти всех вариантов в задаче? Эта проблема исследуется в теории *NP*-полных задач, сформировавшейся на основе работ С. Кука, Р. Карпа, Л. Левина и др. [2]. При принятии гипотезы $P \neq NP$ точных полиномиальных алгоритмов решения этого класса задач не существует [2]. Можно лишь в некоторых классах *NP*-полных задач выделять подклассы (определяемые ограничениями, накладываемыми на параметры комбинаторной задачи), для которых строятся точные полиномиальные алгоритмы [2]. В общем случае эффективными являются лишь приближенные и эвристические алгоритмы.

В [1, 3, 4] изложен новый подход к возможности получения точного решения *NP*-полных задач достаточно большой размерности, сформировавшийся как теория ПДС-алгоритмов. ПДС-алгоритмом называется алгоритм [1], состоящий из полиномиальной и экспоненциальной составляющей, которые могут содержать условия декомпозиции исходной задачи на подзадачи меньшей размерности (обычно полиномиальная составляющая является частью экспоненциальной составляющей). Верхняя оценка сложности полиномиальной составляющей известна. Полиномиальная составляющая порождается логико-аналитическими условиями (*p*-условиями), выполнение которых допустимым решением, полученным в результате реализации полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма, определяет его как оптимальное. *p*-условия находятся в результате теоретических исследований соответствующего класса труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации. Усредненная эффективность полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма находится статистическими методами [1]. Полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма синтезируется таким образом, чтобы последовательная процедура конструирования допустимых решений была наиболее эффективной с точки зрения реализации *p*-условий (признаков оптимальности допустимых решений). Иногда экспоненциальная составляющая ПДС-алгоритма заменяется алгоритмом полиномиальной сложности, приводящим к приближенному (субоптимальному) решению [1].

Несмотря на единую методологию построения ПДС-алгоритмов, их конкретная реализация для различных классов труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации (в частности, их полиномиальная составляющая) приводит к абсолютно различным алгоритмам [1, 3, 4]. Таким образом, построение ПДС-алгоритма для труднорешаемой задачи комбинаторной оптимизации однозначно определяется возможностью получения для этого класса задач конструктивных (просто проверяемых) признаков оптимальности допустимого решения.

В статье формулируется ряд новых одноэтапных задач календарного планирования, для каждой из которых находятся *p*-условия (признаки оптимальности допустимого решения). Полученные результаты реализуют возможность построения для этих классов комбинаторных задач оптимизации эффективных ПДС-алгоритмов. Подавляющее число исследуемых ниже новых одноэтапных задач календарного планирования порождены приведенной в [5] многоэтапной сетевой задачей календарного планирования – формальным представлением третьего уровня четырехуровневой модели планирования, принятия решений и оперативного управления в сетевых системах с ограниченными ресурсами [5].

*Примечание.* Приведенные новые одноэтапные задачи календарного планирования не исследовались на предмет того, к какому классу задач ($P$ или не проще, чем $NP$-полные) они относятся. Однако это не суть важно – ПДС-алгоритм может оказаться необходимой вычислительной процедурой и в случаях, когда:

а) неизвестен точный полиномиальный алгоритм решения задачи;

б) точный полиномиальный алгоритм будет построен (обоснование принадлежности задачи классу $P$), либо если будет доказано, что $P = NP$, но ПДС-алгоритм статистически значимо окажется его эффективней. Это возможно в том случае, когда сложность точного полиномиального алгоритма существенно выше сложности полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма.

### Задача 1.1

Задано множество заданий $J$, число независимых приборов $m$, для каждого задания $j \in J$ известна длительность выполнения $l_j$, $j = \overline{1,n}$. Все задания имеют общий директивный срок $d$. Процесс обслуживания каждого задания может начаться в любой момент времени, он будет протекать без прерываний до завершения обслуживания задания. Все приборы работают без прерываний с общим моментом запуска.

Необходимо построить допустимое расписание выполнения заданий $j \in J$, у которого момент запуска заданий на выполнение $r$ является максимальным либо суммарное опережение времени завершения выполнения заданий относительно общего директивного срока является минимальным.

Как показано в [6], оптимальное расписание по одному из критериев автоматически является оптимальным расписанием по второму критерию.

В [6] приведен первый признак оптимальности допустимого расписания: на равномерном расписании (время работы всех приборов одинаково) достигается абсолютный оптимум по обоим критериям. В случае невыполнения этого условия оптимальным является допустимое расписание, у которого выполняется второй признак оптимальности: допустимое расписание является оптимальным по обоим критериям, если $\forall C_i$ (где $C_i$, $i = \overline{1,m}$ – суммарное время работы $i$-го прибора) выполняется: для любых $i \neq j$, $i, j = \overline{1,m}$, $|C_i - C_j| = 0 \vee b$, где $b$ – произвольное рациональное число такое, что $\forall i = \overline{1,n}$ числа $l_i / b$ являются целыми; $l_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ – длительность $i$-го задания, произвольное рациональное число (пример такого расписания приведен на рис. 1).

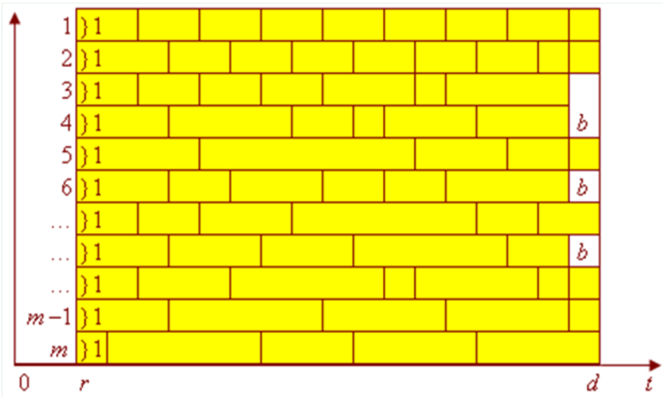


***Рис. 1.***

*Доказательство.* Рассмотрим частный случай такого расписания, когда $l_i$, $i = \overline{1,n}$ – целые числа, а $b$ равняется единице. Это расписание является оптимальным по критерию максимизации момента $r$ запуска заданий на выполнение. Действительно, $r_{\max}$ не удовлетворяет неравенству

$$r_{\max} \geq d - C_{\min}, \quad C_{\min} = \min_{i=\overline{1,m}} C_i. \tag{1}$$

Действительно, из рис. 1 следует, что для $r \geq d - C_{\min}$ построенное допустимое расписание невозможно, т.к. выполняется неравенство

$$\mathrm{C}_{\min} \cdot m < \sum_{i=1}^{n} l_i$$

в силу того, что $l_i$, $C_i$ – целые числа, $r_{max} \leq d - C_{\min} - 1$. Но для $r = d - C_{\min} - 1$ построено допустимое расписание, значит, $r_{max} = d - C_{\min} - 1$.

*Примечание.* В силу того, что $C_i$ – целые числа, $\forall i, j, i \neq j, |C_i - C_j|$ – натуральные числа.

Общий случай. $b > 0$ – рациональное число, $l_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ – рациональные числа, $\forall i$ $l_i / b$ – натуральные числа. Путем изменения масштаба эту задачу сводим к предыдущей: $\hat{l}_i, i = \overline{1,n}$ – новые длительности, выражаются в натуральных числах, где единица измерения равна $b$. В новых единицах измерения допустимое расписание (рис. 1) сводим к рассматриваемому выше частному случаю.

**Утверждение 1.** Число $b$ является общим делителем чисел $l_i$, $i=\overline{1,n}$, который нацело делится на остальные общие делители $a_j$, $j=\overline{1,k}$, причем $\forall i\ l_i / b$, $\forall i\ l_i / \forall j\ a_j$ являются целыми числами.

*Доказательство*. Если для $\forall i \neq j$ выполняется $C_i \neq C_j$ ($|C_i - C_j| = b > 0$, см. рис. 1), то обязательно $|C_i - C_j| = k_l a_l$, $l=\overline{1,k}$, где $\forall l\ k_l$ – целые числа. Действительно, т.к. $\forall i\ l_i / a_l$, $l=\overline{1,k}$, – целые числа, то $\forall a_l$ число $|C_i - C_j|$ можно представить в виде $k_l a_l$, где $k_l$ – целое число. Отсюда, $b$ нацело делится на $\forall a_l$, $l=\overline{1,k}$.

*Следствие*. $b$ – наибольший общий делитель чисел $l_i$, $i=\overline{1,n}$.

Пусть $k$ – число приборов, у каждого из которых суммарное время работы равно $d-b$ (см. рис. 1), где $d$ – общий директивный срок. Обозначим

$$\hat{l} = \sum_{i=1}^{n} l_i \Big/ b .$$

**Утверждение 2.** а) если $\hat{l}\ /\ m$ – целое число, то второй критерий оптимальности не может быть реализован ($k$ не существует);

б) если $\hat{l}\ /\ m$ – дробное число, то $k$ – единственное из множества $\{1, \ldots, m-1\}$, при котором $\hat{l}\ /\ m - k\ /\ m$ – целое число.

*Доказательство.* Из рис. 1 следует, что

$$m \cdot \mathrm{C}_{\max} = \sum_{i=1}^{n} l_i - k \cdot b$$

или $d_1 = \hat{l}\ /\ m - k\ /\ m$, где $d_1 = \mathrm{C}_{\max}\ /\ b$ – целое число, $\sum_{i=1}^{n} l_i \Big/ b = \hat{l}$ – целое число. Если $\hat{l}\ /\ m$ – целое число, то при любом $k = \overline{1, m-1}$ $d_1$ – дробное число, что невозможно. Если $\hat{l}\ /\ m$ – дробное число, то только при одном $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ $d_1$ является целым числом.

## Задача 1.2

Постановка задачи 1.2 отличается от постановки задачи 1.1 тем, что приборы запускаются в разные моменты времени $t_{1,\text{н}} \leq t_{2,\text{н}} \leq \ldots \leq t_{m,\text{н}}$, $t_{i+1,\text{н}} - t_{i,\text{н}} = d_i$. $i = \overline{1, m-1}$ – заданные числа. Необходимо найти допустимое расписание, оптимальное по одному из двух критериев:

1) $t_{1,\text{н}}$ является максимальным;

2) суммарное опережение директивного срока является минимальным:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \left(d - t_{i\text{к}}\right),$$

где $t_{i\text{к}}$ – момент окончания работы $i$-го прибора.

**Утверждение 3.** Если

$$\sum_{i=1}^{n} l_i > \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{j=2}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{m-1} d_i - \sum_{l=1}^{j-1} d_l \right), \qquad (2)$$

то: а) допустимое расписание, оптимальное по одному из двух критериев, является оптимальным по другому;

б) первый и второй признаки оптимальности допустимого расписания для задачи 1.1 также являются признаками оптимальности допустимого расписания для задачи 1.2.

в) Утверждение 1 для задачи 1.1 справедливо и для задачи 1.2. Утверждение 2 для задачи 1.1 справедливо для задачи 1.2 в случае, когда все числа $d_i$, $i = \overline{1, m-1}$, нацело делятся на $b$.

Утверждение 3 очевидным образом следует из [6], доказательств утверждений 1, 2, приведенных для задачи 1.1, и иллюстрируется рис. 2.

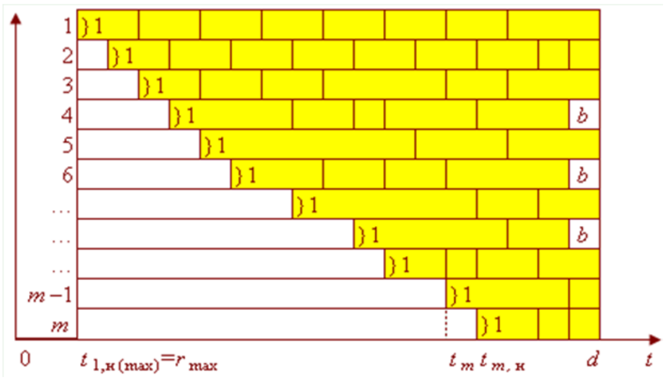


***Рис. 2.***

*Примечание.* Условие (2) необходимо для того, чтобы в любом допустимом расписании всегда выполнялось $\max_i \mathrm{C}_i > t_{m,\text{н}}$.

## Задача 1.3

Постановка задачи отличается от постановки задачи 1.1 тем, что приборы могут запускаться в произвольные моменты времени. Необходимо найти допустимое расписание, у которого бы выполнялось: max $t_{i,\text{н}}$ является минимально возможным.

**Утверждение 4.** Признаком оптимальности допустимого расписания для задачи 1.3 является выполнение следующих условий:

1) суммарное опережение равно нулю;

2) расписание является равномерным ($t_{i,\text{н}} = \text{const}$) либо

$$|\, t_{i,\text{н}} - t_{j,\text{н}} \,| = 0 \vee b, \qquad (3)$$

где $b > 0$ – наибольший общий делитель чисел $l_i$; $l_i / b$ – целые числа, $i = \overline{1,n}$. Число $k$ приборов, у которых $t_{i,\text{н}} < \max\limits_{j=\overline{1,m}} t_{j,\text{н}}$, является единственным и определяется в утверждении 2 (задача 1.1).

Доказательство утверждения 4 очевидным образом вытекает из [6] и исследования задачи 1.1 и иллюстрируется рис. 3.

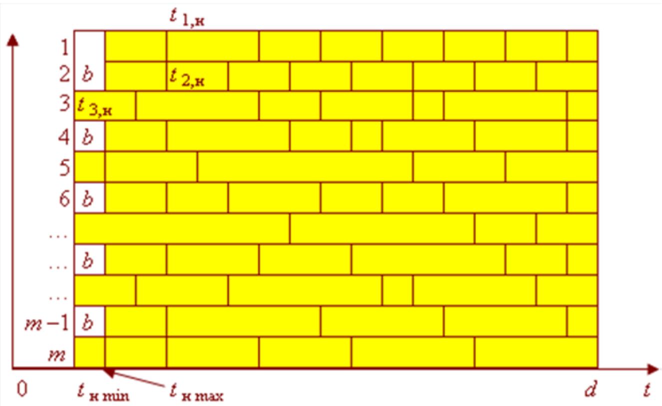


***Рис. 3.***

**Задача 2**

Задано множество заданий $J$, число независимых приборов $m$, для каждого задания $j \in J$ известна длительность выполнения $l_j$, $j = \overline{1,n}$. Процесс обслуживания каждого задания может начаться в любой момент времени, он будет протекать без прерываний до завершения обслуживания заданий. Все приборы работают без прерываний. Заданы ограничения на моменты окончания работы приборов, т.е. должны выполняться условия:

$$t_{i\text{к}} \le d_i, \quad d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_m, \quad i = \overline{1,m}$$

где $t_{i\text{к}}$ – момент окончания работы $i$-го прибора.

Директивные сроки для моментов окончания выполнения заданий отсутствуют.

Необходимо найти допустимое расписание, у которого $\min\limits_{i=\overline{1,m}} t_{i,\text{н}} \to \max$.

**Утверждение 5.** Если

$$\sum_{i=1}^{n} l_i > \sum_{i=1}^{m-1}(d_i - d_{i+1}) +$$
$$+\sum_{i=2}^{m-1}\left[\sum_{i=1}^{m-1}(d_i - d_{i+1}) - \sum_{l=1}^{j-1}(d_l - d_{l+1})\right],$$

то признаком оптимальности допустимого расписания является:

п. 1) $t_{i\text{к}} = d_{i\text{к}}$, $i = \overline{1,m}$;

п. 2) совпадает с п. 2) утверждения 4, причем число $k$ приборов, у которых $t_{i,\text{н}} < \max\limits_{j=\overline{1,m}} t_{j,\text{н}}$, единственно, если числа $d_i - d_{i+1}$, $i = \overline{1,m-1}$, нацело делятся на $b$.

*Доказательство* утверждения 5 следует из доказательств утверждений 3 и 4 и иллюстрируется рис. 4.

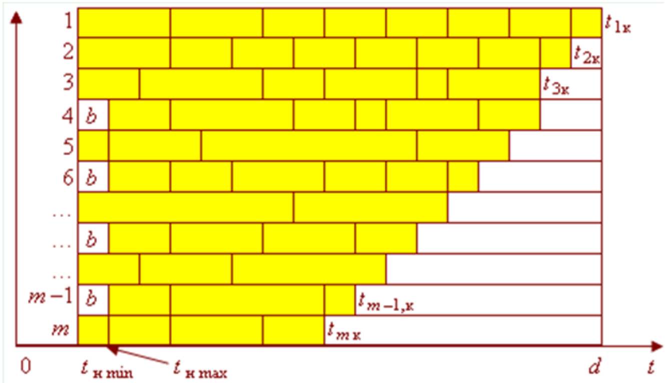


***Рис. 4.***

**Задача 3**

Задано множество независимых заданий $J = \{\overline{1,n}\}$, каждое из которых состоит из одной операции длительности $l_j$, $j = \overline{1,n}$. Заданы директивные сроки выполнения заданий $d_j$, $j = \overline{1,n}$. Прерывания в процессе выполнения задания не допускаются. Имеется один прибор, предназначенный для выполнения заданий. Задания поступают в систему одновременно.

*Примечание*. Нумерация заданий реализует выполнение неравенств: $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$.

Необходимо построить допустимое расписание, у которого одновременно выполняются:

1) момент начала выполнения заданий $r$ является максимальным $r_{\max}$ (критерий 1);

2) суммарное опережение выполнения заданий относительно директивных сроков является минимальным (критерий 2).

В [7] показано, что оптимальной последовательностью заданий по критерию 1 является последовательность, упорядоченная по неубыванию значений директивных сроков. В [7] приведен алгоритм А (линейной относительно $n$ сложности) нахождения $r_{\max}$. В [7] также показано, что верхней оценкой отклонения суммарного опережения директивных сроков этого допустимого расписания от допустимого расписания, оптимального по критерию 2, является

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(d_i - r_{\max} - \sum_{j=1}^{i} l_j\right) \Big/ \min_{j=\overline{i+1,n}} l_j\right]\Delta_i, \tag{4}$$

$$\Delta_i = \max\left(0, \max_{j=\overline{i+1,n}} l_j - l_i\right),$$

где $\lfloor a \rfloor$ обозначает ближайшее снизу целое от $a$.

**Утверждение 6.** Признаком оптимальности по обоим критериям допустимого расписания является:

п. 1. Последовательность, упорядоченная по неубыванию значений директивных сроков с $r_{\max}$, определенным в [7] (алгоритм А), является также оптимальной по критерию минимизации суммы опережений выполнения заданий относительно директивных сроков, если для него (4) равно нулю.

п. 2. Пусть (4) не равно нулю.

Шаг 1. В допустимом расписании $(1, 2, \ldots, n)$ с $r_{\max}$ [7] находим минимальный натуральный индекс $p$, для которого выполняется: в расписании $(1, 2, \ldots, n)$ существуют работы с номерами из множества $\{i = \overline{1, p-1}\}$, для которых выполняется неравенство $t_{p\text{к}} \le d_i$, где $t_{p\text{к}}$ – момент окончания выполнения $p$-го задания. Переупорядочиваем эти задания (вместе с заданием $p$) по невозрастанию их длительностей. В [7] показано, что такая перестановка уменьшает суммарное опережение, если есть неупорядоченные задания разной длительности.

Шаг 2. Дальше находим следующий по возрастанию наименьший натуральный индекс $p$, для которого может быть реализована описанная выше процедура, а множество работ, которые будут упорядочены по неубыванию, не совпадает с предыдущим (для дальнейших значений индекса $p$ с предыдущими).

Таких шагов может быть не более, чем $n-1$. Пусть суммарное результирующее опережение равно $\Delta$. Тогда, если

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\left(d_i - r_{\max} - \sum_{j=1}^{i} l_j\right)\Big/\min_{j=i+1,n} l_j\right\rfloor \Delta_i - \Delta = 0, \quad (5)$$

то полученное допустимое расписание является оптимальным по обоим критериям.

*Доказательство* утверждения 6 вытекает из доказательства теорем 4 и 5 [7].

**Следствие.** Если у допустимого расписания, полученного в п. 2 утверждения 6, выражение (5) больше нуля, то полученное допустимое расписание является строго оптимальным по первому критерию, субоптимальным по второму критерию с верхней оценкой отклонения от оптимального значения по второму критерию, которая задается выражением (5).

### Задача 4.1

Имеется $m$ независимых параллельных приборов равной производительности, работающих без прерываний, которые выполняют $n$ работ ($l_i$ – длительность выполнения $i$-й работы, $i = \overline{1,n}$). Работы должны быть выполнены к директивным срокам $d_i$. Моменты запуска станков произвольны. Необходимо построить допустимое расписание, минимизирующее следующий критерий:

$$r_{i_1} = \max\{\min_{i=1,n} r_i\};$$

$$r_{i_l} = \max\{\min_i r_i, i = \overline{1,n}, i \ne j_k, k = \overline{1,l-1}\}, \; l = \overline{2,n}, \quad (6)$$

где $i_1$ – номер прибора, у которого момент запуска в оптимальном расписании самый ранний (он является самым поздним для всех допустимых расписаний); $i_l$, $l = \overline{2,n}$ – номер прибора, у которого момент запуска следующий по величине после приборов $i_k$, $k = \overline{1,l-1}$ (он является самым поздним для всех допустимых расписаний с фиксированным $r_{i_k}$, $k = \overline{1,l-1}$).

Очевидно, выполняются неравенства $d_i - l_i \ge 0$, $i = \overline{1,n}$. Перенумеруем работы по неубыванию чисел $d_i - l_i$, и пусть при этом выполняются неравенства $d_1 - l_1 < d_2 - l_2 < \ldots < d_n - l_n$.

*Конструирование признака оптимальности №1 допустимого расписания.*

п. 1. На первый прибор первой назначаем работу с индексом 1. $r_1 = d_1 - l_1$. Числу $r_1$ соответствует максимально возможное значение $r_{i_1}$ в (6). Пусть выполняются следующие неравенства: $d_i + l_j > d_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{i+1,m}$. Тогда назначаем на $j$-й прибор, $j = \overline{2,m}$, первой работу с индексом $j$ и моментом запуска прибора $r_j = d_j - l_j$.

**Утверждение 7.** Произвольное допустимое расписание, для которого выполнен п. 1, является оптимальным по критерию (6).

*Доказательство.* Действительно, нарушение в произвольном допустимом расписании алгоритмической процедуры п. 1 немедленно приводит к выполнению:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \succcurlyeq \forall \begin{pmatrix} r_{l_1} \\ \vdots \\ r_{l_m} \end{pmatrix}$$

в соответствии с предпорядком – лексиграфическим порядком, где $(r_1 \;\ldots\; r_m)^{\mathrm{T}}$ соответствует произвольное допустимое расписание, у которого выполнен п. 1, а $(r_{l_1} \;\ldots\; r_{l_m})^{\mathrm{T}}$ – моменты запуска приборов для произвольного допустимого расписания.

*Примечание.* Если в соответствии с п. 1 все работы распределены на меньшем количестве приборов, то соответствующие $r_j$ формально кладутся равными $+\infty$.

*Конструирование признака оптимальности №2 допустимого расписания.*

п. 2. На первый прибор первой назначается работа с индексом 1. $r_1 = d_1 - l_1$. ($d_1 - l_1$ – это максимально большое возможное значение $r_{i_1}$ в (6)). Пусть $k_2 - 1$ – максимальное натуральное число, для которого выполняются неравенства:

$$d_1 + \sum_{j=2}^{l} l_j \le d_l,\ l = \overline{1, k_2 - 1}. \tag{7}$$

Тогда на первый прибор последовательно назначаются работы с индексами 1, 2, …, $k_2 - 1$. Работа с индексом $k_2$ назначается первой на второй прибор, $r_2 = d_{k_2} - l_{k_2}$. Если неравенство

$$\min\{d_1 + \sum_{j=2}^{k_2-1} l_j + l_{k_2+1},\ d_{k_2} + l_{k_2+1}\} \le d_{k_2+1}$$

не выполняется, тогда на третий прибор первой назначается работа с индексом $k_2 + 1$ в момент времени $r_3 = d_{k_2+1} - l_{k_2+1}$. В этом случае $k_3 = k_2 + 1$. В противном случае должны выполняться неравенства:

$$\min\{d_1 + \sum_{j=2}^{k_2-1} l_j,\ d_{k_2}\} + l_{k_2+1} \le d_{k_2+1}, \tag{8}$$

$$\max\{d_1 + \sum_{j=2}^{k_2-1} l_j,\ d_{k_2}\} + l_{k_2+1} > d_{k_2+1}. \tag{9}$$

Тогда работа с индексом $k_2 + 1$ назначается на прибор, которому соответствует минимум в (8). Если неравенство (8) выполнено, а неравенство (9) нарушается, то признак оптимальности №2 допустимого расписания для данной индивидуальной задачи нарушен. Аналогично последовательно назначаются на первый либо второй прибор работы с индексами $\overline{k_2 + 2, k_3 - 1}$ ($k_3$ – максимально возможное натуральное число). При этом, если текущая работа может быть назначена на прибор с меньшим моментом начала обслуживания, то назначение ее на прибор с большим моментом времени начала обслуживания должен приводить к нарушению директивного срока (аналог выполнения неравенств (8), (9)). Работа с индексом $k_3$ первой назначается на третий прибор в момент времени $r_3 = d_{k_3} - l_{k_3}$.

Аналогично происходит дальнейшее последовательное назначение работ с индексами $k_3 + j$ на приборы. Необходимым условием выполнения признака оптимальности №2 является требование, что распределяемая работа может быть назначена только на один прибор (с минимальным временем освобождения) из текущего множества приборов, на которые производится назначение работ. Если ни на один прибор из текущего множества приборов работа не может быть назначена, она назначается первой на следующий прибор в момент времени, равный директивному сроку этой работы минус ее длительность. Распределение работ заканчивается либо когда все работа распределены на $l$ приборов ($l < m$), либо назначением на $m$-й прибор первой $k_m$-й работы $r_m = d_{k_m} - l_{k_m}$. Распределение работ в соответствии с п. 2 завершено.

Пусть $J_1$ – множество работ, которое содержит все работы с индексами из множества $\{\overline{1, k_m}\}$ либо $\{\overline{1, k_l}\}$, если работы распределились на $l$ приборах ($l < m$). Потребуем выполнения следующего условия. Перенумеруем все работы из множества $J_1$ в порядке их назначения на приборы. Тогда для каждой работы с индексом $j$ ($j = \overline{2, k_m \vee k_l}$) должно выполняться

$$d_j - t_{j\text{к}} < l_p,\ p = \overline{l+1, k_m \vee k_l}, \tag{10}$$

где $t_{j\text{к}}$ – момент окончания выполнения $j$-й работы. Тогда имеет место утверждение:

**Утверждение 8.** Произвольное допустимое расписание, для которого выполнен п. 2 и условие (10), является оптимальным по критерию (6), т.е.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \succcurlyeq \forall \begin{pmatrix} r_{l1} \\ \vdots \\ r_{lm} \end{pmatrix} \tag{11}$$

в соответствии с предпорядком – лексиграфическим порядком, где $(r_1 \ \dots \ r_m)^{\text{т}}$ соответствует произвольное допустимое расписание, у которого выполнен п. 2 и условие (10), а $(r_{l1} \ \dots \ r_{lm})^{\text{т}}$ – моменты запуска приборов для произвольного допустимого расписания.

*Примечание* 1. Если в соответствии с п. 2 загруженными оказались $l$ приборов ($l < m$), то в (11) $r_{l+j}$, $j = \overline{1, m-l}$, формально принимают значения $+\infty$.

Действительно, из логики распределения работ по приборам (п. 2), а также в сочетании с выполнением условий (10), (8) ÷ (9) и их аналогов на последующих этапах распределения следует, что любое изменение порядка назначения работ (кроме случаев, когда в неравенствах (8), (9) и их аналогах минимум не является единственным) приводит к ухудшению по лексиграфическому порядку моментов начала запуска приборов.

*Примечание* 2. Если все работы распределены по $l$ приборам, $l < m$, то в утверждении 7 п. 2 заканчивается назначением первой на $l$-й прибор работы с номером $k_l$.

*Примечание* 3. Признаки оптимальности №1, 2 позволяют конструировать полиномиальную составляющую ПДС-алгоритма для задачи 4.1: конструируется алгоритм полиномиальной сложности для построения допустимого расписания, у которого предварительно работы из множества $J_1$ назначены в соответствии с утверждением 8 (с учетом примечания 2). При этом алгоритм должен учитывать при назначении еще не распределенных работ резервы времени $d_j - t_{j\text{к}}$, $k = \overline{1, k_m \vee k_l}$, оставшиеся после назначения работ из множества $J_1$ в соответствии с утверждением 8. Если полиномиальный алгоритм построил допустимое расписание, то для него признак оптимальности (утверждение 8) выполнен, и это расписание является оптимальным по лексиграфическому критерию (6). Если допустимое расписание построить не удалось, то задача 4.1 решается экспоненциальной составляющей ПДС-алгоритма либо приближенным или эвристическим полиномиальным алгоритмом, аппроксимирующим экспоненциальную составляющую ПДС-алгоритма.

*Примечание* 4. Приведем одну из наиболее статистически эффективных стратегий построения приближенного полиномиального алгоритма. Приближенный алгоритм полностью совпадает с полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма (примечание 3) за исключением того, что в признаке оптимальности №2 снимается требование, что работа может быть назначена только на один прибор из текущего множества приборов (условия (8), (9) и их обобщение). То есть, текущая работа назначается на прибор с наименьшим временем освобождения, хотя, возможно, ее можно было бы назначить без срыва ее директивного срока первой на другие приборы из текущего множества. Утверждать, что в этом случае построенное допустимое расписание является оптимальным, нельзя, но с учетом выполнения условия (10), а оно приводит к тому, что если текущая работа не назначается на прибор с минимальным временем освобождения, то она может быть назначена только первой на один из текущего множества приборов. А это означает, что количество допустимых вариантов построения начального расписания существенно уменьшается. Очевидно, что при моделировании произвольных индивидуальных задач, для которых выполняется условие (10), логика алгоритма назначать очередную работу на прибор из текущего множества приборов с минимальным временем освобождения практически всегда приводит к выполнению условия (11). Таким образом, построение допустимого расписания с учетом таким образом измененного признака оптимальности №2 (эмпирический признак оптимальности) практически всегда приводит к строгому решению задачи 4.1 по лексиграфическому критерию (6).

**Задача 4.2**

Отличается от задачи 4.1 тем, что для работ с индексами из множества $J_1 \in J = \{\overline{1, n}\}$ ограничениями на момент завершения выполнения $t_{l\text{к}}$ $\forall l = \overline{1, n}$ являются не директивные сроки $d_l$ ($t_{l\text{к}} \le d_l$), а ограничения вида $t_{l\text{к}} \in [d_l - \varepsilon_l, d_l]$ $\forall l \in J_1$, см. [5], $\varepsilon_l > 0$.

В частности, если $\varepsilon_l$ мало, такое ограничение соответствует практической реализации формального ограничения – выполнения работы точно в срок ($t_{l\text{к}} = d_l$).

Для задачи 4.2 признак оптимальности №1 остается без изменений (утверждение 7). Признак оптимальности №2, утверждение 8, а также эмпирический признак оптимальности претерпевают следующие изменения. Либо индексы всех работ, назначенных в соответствии с п. 2 на приборы, начиная со второй, не принадлежат $J_1$, либо у этих работ выполняется

$$t_{l\text{к}} \in [d_l - \varepsilon_l, d_l] \ \forall l \in J_1.$$

**Задача 5.1**

Имеется $m$ независимых параллельных приборов разной производительности, работающих без прерываний, которые выполняют $n$ работ ( $l_i^j$ – длительность выполнения $i$-й работы на $j$-м приборе). Работы должны быть выполнены к директивным срокам $d_i$. Моменты запуска приборов произвольны. Необходимо построить допустимое расписание, оптимальное по критерию (6).

Для задачи 5.1 очевидным образом обобщим признак оптимальности допустимого расписания №1, приведенный для задачи 4.1.

*Конструирование признака оптимальности №1 допустимого расписания.*

п. 1. Рассмотрим следующую монотонно неубывающую последовательность чисел:

$$d_{i_1} - l_{i_1}^{j_1}, d_{i_2} - l_{i_2}^{j_2}, ..., d_{i_m} - l_{i_m}^{j_m}, \text{ где}$$

$$d_{i_1} - l_{i_1}^{j_1} = \min_i \{(d_i - \min_j l_i^j), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}\} \quad (15)$$

$$d_{i_p} - l_{i_p}^{j_p} = \min_i \{(d_i - \min_j l_i^j), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m},$$

$$i \notin \{\overline{i_1, i_{p-1}}\}, j \notin \{\overline{j_1, j_{p-1}}\}\}$$

При этом на каждом приборе достигается только один минимум. Пусть выполняются все неравенства

$$d_{i_l} + l_{i_p}^{j_l} > d_{i_p} \;\; \forall p = \overline{l+1, m}, l = \overline{1, m-1}.$$

Тогда имеет место утверждение:

**Утверждение 9.** Произвольное допустимое расписание, у которого на прибор $j_l$, $l = \overline{1,m}$, первой назначается работа $i_l$ в момент времени $r_{j_l} = d_{i_l} - l_{i_l}^{j_l}$, является оптимальным расписанием по критерию (6).

### Задача 5.2

Является обобщением задачи 5.1, идентичным обобщению задачи 4.1 на задачу 4.2.

Для задачи 5.2 признак оптимальности допустимого расписания (утверждение 9) остается справедливым. Действительно, все $r_i \in [d_i - \varepsilon_l, d_i]$, $i = \overline{1,m}$, по построению.

### Выводы

В статье приведены основы теории ПДС-алгоритмов. Сделаны новые постановки одноэтапных задач теории расписаний. Найдены для них признаки оптимальности допустимого расписания – основы построения ПДС-алгоритмов.

### Список литературы


1. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография.– К.: Наукова думка. – 2010. – 573 с.
2. Гери М.Р., Джонсон Д.С. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
3. Конструктивные полиномиальные алгоритмы решения индивидуальных задач из класса NP. / А.А.Павлов, А.Б.Литвин, Е.Б.Мисюра, Л.А.Павлова, В.И.Родионов, под редакцией А.А.Павлова.– К.: Техника, 1993.– 126 с.
4. Pavlov A., Pavlova L. PDC-algorithms for intractable combinatorial problems. Theory and methodology of design.– Uzhhorod, «Karpatskij region» shelf №15, 1998.– 320 pp.
5. Павлов А.А., Мисюра Е.Б., Лисецкий Т.Н., Сперкач М.О., Халус Е.А. Четырехуровневая модель планирования, принятия решений и оперативного управления в сетевых системах с ограниченными ресурсами // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: “ВЕК+”, 2013. – №58 – 14 с.
6. Павлов А.А., Мисюра Е.Б., Сперкач М.О. Исследование свойств задачи календарного планирования выполнения заданий с общим директивным сроком параллельными приборами по разным критериям оптимальности // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: “ВЕК+”, 2012. – №57.– С. 15–17.
7. Павлов А.А., Мисюра Е.Б., Халус Е.А. Исследование свойств задачи календарного планирования для одного прибора по критерию минимизации суммарного опережения заданий при условии допустимости расписания // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: “ВЕК+”, 2012. – №56.– С. 98–102.