УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
ХАЛУС Е.А.

СОСТАВЛЕНИЕ ДОПУСТИМОГО РАСПИСАНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ НА ОДНОМ ПРИБОРЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО КРИТЕРИЮ МИНИМИЗАЦИИ СУММАРНОГО ОПЕРЕЖЕНИЯ РАБОТ

Рассмотрена задача составления допустимого расписания выполнения независимых работ с различными длительностями и директивными сроками одним прибором, при котором минимизируем суммарное опережение директивных сроков. Предложен ПДС – алгоритм нахождения оптимального расписания по критерию минимизации суммарного опережения.

We considered a problem of creation of feasible schedule of performing an independent operations with different durations and due dates of a single device, in which the minimum of the total earliness of due dates is achieved. We consider PDS – an algorithm for finding an optimal schedule on criteria of minimizing the total earliness.

Введение

Работа посвящена широко распространенной на практике задаче составления расписания выполнения множества работ с различными директивными сроками одним прибором, в которых все работы должны быть выполнены без нарушения их директивных сроков, и при этом должно достигать минимума суммарное отклонение моментов окончания работ от их директивных сроков.

Постановка задачи

Задано множество независимых работ $J = \{1,2,...,n\}$, каждая из которых состоит из одной операции. Для работы $j \in J$ известны длительность выполнения p_j и директивный срок выполнения d_j. Прерывания работ не допускаются. Работы поступают в систему одновременно. Процесс выполнения работ является непрерывным: после выполнения первой по порядку работы сразу же начинает выполняться вторая и т.д. Необходимо найти допустимое расписание, в котором суммарное опережение моментов окончания выполнения работ относительно директивных сроков принимает минимальное значения.

Определение 1. Расписание называется *допустимым*, если в нем удовлетворены все директивные сроки (все задания не запаздывают).

Определение 2. Для заданного расписания под *моментом запуска* r понимается момент начала выполнения работы, которая в расписании стоит на первой позиции [3].

Введем обозначения:

C_j – момент окончания работы j;

E_j – значение опережения для j - ой работы: $E_j = \max\{0; d_j - C_j\}$.

В допустимом расписании $d_j \ge C_j \ \forall j$, т.е. $E_j = d_j - C_j$.

Эта задача является близкой к двухкритериальной задаче, рассмотренной в [2,3], в которой требуется найти допустимое расписание, в котором момент запуска работ является максимально поздним (***критерий 1***), а суммарное опережение выполнения работ относительно директивных сроков принимает минимальное значения (***критерий 2***). В рамках решения двухкритериальной задачи предполагалось, что первичным критерием являлся ***критерий 1***. В некоторых практических задачах основным критерием оценки расписания является ***критерий 2*** – минимизация суммарного опережения, именно этот критерий и рассматривается в данной работе.

Для решения рассматриваемой задачи были использованы результаты, полученные при исследовании двухкритериальной задачи [1,2,3]. Так, в работе [2] был разработан алгоритм ***A*** определения самого позднего момента запуска выполнения работ в системе $n/1/r \rightarrow \max$, при котором расписание остается допустимым. Суть алгоритма состоит в следующем. Вначале работы упорядочиваются по неубыванию директивных сроков, затем определяется момент запуска выполнения работ, при котором в расписании хотя бы одна работа будет запаздывающей. Определяется максимальное из запаздываний и вся последовательность работ сдвигается влево на эту величину.

Теорема 1. Алгоритм A строит допустимое расписание, в котором момент r начала выполнения работ (момент запуска) является самым поздним [2].

Следующая теорема описывает достаточные условия оптимальности двухкритериальной задачи.

Теорема 2. Допустимое расписание с моментом запуска $r_{\max}$, построенное по неубыванию директивных сроков, является оптимальным по критерию минимизации суммарного опережения при выполнении условий [2]:

$$d_{j_1} \le d_{j_2} \le \ldots \le d_{j_n}, p_{j_1} \ge p_{j_2} \ge \ldots \ge p_{j_n}, \qquad (1)$$

где j_i - это номер задания, которое в расписании занимает i-ую позицию.

Если сохранять установленный момент запуска $r_{\max}$ и при этом стремиться минимизировать и суммарное опережение заданий, то упорядочение должно осуществляться в соответствии с теоремой 3.

Теорема 3. Пусть σ - допустимое расписание выполнения n работ с максимально поздним моментом запуска $r_{\max}$, тогда допустимое расписание $\sigma_1 = \{j_1, j_2, ... j_n\}$ (j_i - это номер работы, которая в σ_1 занимает i-ую позицию) построенное по следующему правилу:

$$p_{j_n} = \min_{s \,/\, d_s \ge \sum\limits_{j=1}^{n} p_j + r_{\max}} \{p_s\}, \qquad (2)$$

$$p_{j_i} = \min_{s \,/\, d_s \ge \sum\limits_{j=1}^{n} p_j - \sum\limits_{l=0}^{n-i-1} p_{j_{n-l}} + r_{\max}} \{p_s\}, \; i = \overline{n-1,1} \qquad (3)$$

является оптимальным по критерию минимизации суммарного опережения работ с максимально поздним моментом запуска $r_{\max}$ [3].

Следствие 3.1. Для любого заданного момента запуска $\forall r < r_{\max}$ расписание, построенное в соответствии с рекуррентными соотношениями (2)-(3), имеет минимальное суммарное опережение для данного r [3].

В работе [3] был разработан полиномиальный алгоритм ***A1*** нахождения оптимального расписания по критерию суммарного опережения для заданного момента запуска r. Схема алгоритма базируется на равенствах (2)-(3), в которых вместо $r_{\max}$, подставляется $\forall r < r_{\max}$.

Отметим, что при ухудшении расписания по ***критерию 1*** (при смещении его влево) можно получить расписание, которое по ***критерию 2*** лучше предыдущего. Следующий пример иллюстрирует это утверждение.

Пример 1.

Пусть имеется 5 работ с такими длительностями выполнения и директивными сроками:

$n = 5$;

$p_1 = 1$; $p_2 = 1$; $p_3 = 1$; $p_4 = 1$; $p_5 = 100$;

$d_1 = 110$; $d_2 = 111$; $d_3 = 112$; $d_4 = 113$; $d_5 = 114$.

В соответствии с алгоритмом ***A*** определено, что $r_{\max} = 10$. По Алгоритму ***A1*** для заданного момента запуска построено расписание, оптимальное по ***критерию 2***, у которого суммарное опережение равно 396 (рисунок 1).

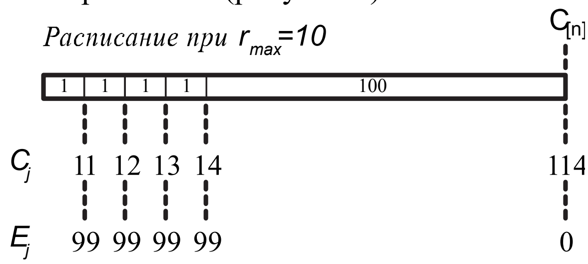

Рис. 1. Расписание при максимальном моменте запуска $r_{\max} = 10$

После этого для момента запуска $r = 9$ по алгоритму ***A1*** построено расписание, оптимальное по ***критерию 2***, у которого суммарное опережение равно 5 (рисунок 2).

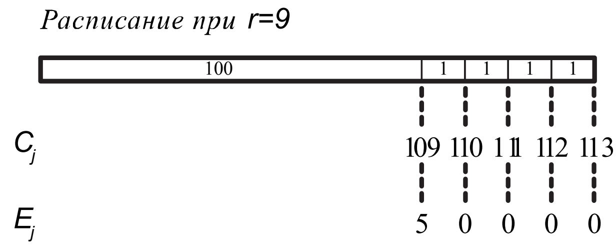

Рис. 2. Расписание при моменте запуска $r = 9$

Как видим, при ухудшении на единицу значения ***критерия 1***, значение ***критерия 2*** улучшилось на величину 396-5=391.

Одним из подходов к эффективному решению как труднорешаемых (NP-полных) задач комбинаторной оптимизации, так и в некоторых случаях P – разрешимых задач комбинаторной оптимизации является разработка ПДС – алгоритмов [1]. В [4] приведена классификация ПДС- алгоритмов. ПДС – алгоритмы бывают двух типов. Необходимым и достаточным условием построения ПДС – алгоритма, является нахождение теоретически обоснованных признаков оптимальности допустимого решения (достаточные условия оптимальности), которые конструктивно проверяются в процессе ее решения полиномиальным алгоритмом (Р – составляющая ПДС - алгоритма). Данная задача решается ПДС – алгоритмом второго типа: кроме Р – составляющей он содержит полиномиальную аппроксимацию точного алгоритма (приближенное решение, полученное в случае не выполнения достаточных условий оптимальности).

Признак оптимальности допустимого расписания

Обозначим через:

$E(r)$ – значение критерия 2 в расписании, построенном по теореме 3 (минимальное суммарное опережение при заданном моменте запуска r);

r_{opt} – момент запуска в расписании с минимальным суммарным опережение среди расписаний со всеми возможными моментами запуска.

Пусть имеем расписание, построенное по теореме 3 для момента запуска $r_{\max}$. Очевидно, что при уменьшении момента запуска на произвольную величину Δ (смещении полученной последовательности работ влево на Δ) суммарное опережение увеличится на $n\Delta$. При дальнейшем увеличении величины Δ может наступить такой момент, когда для некоторого момента запуска $r = r_{\max} - \Delta \geq 0$ после применения теоремы 3 произойдет смена структуры расписания (изменение порядка выполнения работ) и при этом $E(r) < E(r^+)$. $E(r^+)$ - точки разрыва в графике зависимости $E(r)$ от r, которые представлен на рисунке 3.

Признак 1) Пусть имеем расписание, у которого момент запуска равен $r_{\max}$ и для которого выполняется равенство:

$$E(r_{\max}) + nr_{\max} = E(0)\,, \qquad (4)$$

(где $E(r_{\max})$, $E(0)$ - значение ***критерия 2*** для моментов запуска $r_{\max}$ и 0 соответственно), то это расписание является оптимальным по двум критериям. То есть, имеем, что $r_{opt} = r_{\max}$.

Отметим также, что для любого r (и в том числе и для $r_{\max}$) невозможно выполнение неравенства: $E(r) + nr < E(0)$.

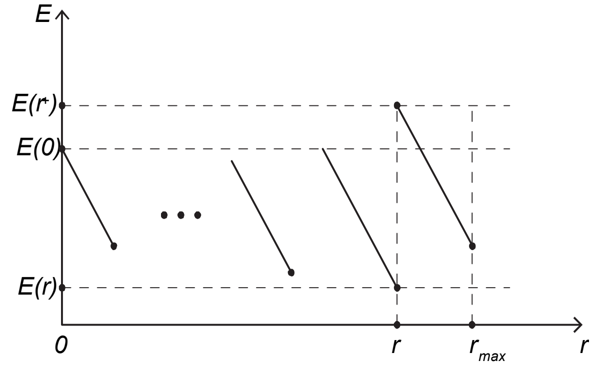

Рис. 3. Изменение суммарного опережения при изменении момента запуска

Признак 2) Пусть равенство (4) не выполняется и пусть при этом существует фиксированный момент запуска $r < r_{\max}$, для которого выполняется равенство:

$$E(r) + nr = E(0) \qquad (5)$$

Тогда оптимальный момент запуска r_{opt} (соответствующий оптимальному суммарному опережению) удовлетворяет неравенству:

$$r \leq r_{opt} < r_{\max}\,.$$

Доказательство выполнения признаков проведем методом от противного.

Пусть выполняется признак 1, но при этом $r_{opt} \neq r_{\max}$. Это означает, что существует момент запуска $r_{opt} < r_{\max}$, для которого $E(r_{opt}) < E(r_{\max})$.

С учетом того, что

$$E(r_{\max}) + nr_{\max} = E(0)$$

имеем:

$$nr_{\max} > nr_{opt}\,.$$

Следовательно

$$E(r_{opt}) < E(r_{\max})\,,$$

$$E(r_{opt}) + nr_{opt} < E(r_{\max}) + nr_{\max} = E(0)$$

Пришли к противоречию. Справедливость признака 1) доказано.

Пусть выполняется признак 2), но $r_{opt} < r$, тогда $E(r_{opt}) < E(r)$. Следовательно, $E(r_{opt}) + nr_{opt} < E(r) + nr = E(0)$, что невозможно. Справедливость признака 2) доказано. ■

Принципиальная схема ПДС-алгоритма

Вначале для $r_{\max}$ строится оптимальное по критерию 2 расписание. Если для него выполняется равенство $E(r_{\max})+nr_{\max}=E(0)$, то полученное расписание оптимально. Если не выполняется признак 1) признака оптимальности, то применяется полиномиальный (со сложностью $kO(n^2)$) алгоритм, который изменяя моменты запуска выполнения заданий от $r_{\max}$ до 0 и применяя рекуррентно процедуру из теоремы 3 позволяет получить ряд расписаний, оптимальных для моментов запуска

$$r_{\max},\ r_1,\ r_2,\ ...,\ r_k,$$

где: $r_1=r_{\max}-\Delta_1, r_2=r_1-\Delta_2,...,r_k=r_{k-1}-\Delta_k$.

$r_1,\ r_2,\ ...,\ r_k$ – дискретные моменты изменения структуры оптимального по критерию 2 расписания, когда точно меняется позиция хотя бы одной работы (k - заданное число).

Длины интервалов $\Delta_l,\ l=\overline{1,k}$ с неизменной структурой расписания определяем следующим образом:

$$\Delta_l=\min_{2\le i\le n}\left\{C_{j_i}-\max_{\substack{s\,/\,p_s<p_{j_i}:\\ d_s<C_{j_i}}}\{d_s\}\right\}. \qquad (6)$$

Величина $\max\limits_{\substack{s\,/\,p_s<p_{j_i}:\\ d_s<C_{j_i}}}\{d_s\}$ – максимальный директивный срок из тех работ, длительность которых меньше длительности текущей работы j_i, и которые имеют директивный срок меньше, чем момент окончания работы j_i.

Процесс заканчивается, если для любого i в (6) максимум не определен (нет работ s, которые удовлетворяют условиям: $p_s<p_{j_i},\quad d_s<C_{j_i}$.

Для всех $r\in[r_l,r_{l-1})$ $l=\overline{1,k}$ $(r_0=r_{\max})$ структура оптимального расписания постоянна и $E(r_l)<E(r_{l-\Delta})$ для всех $0<\Delta<r_l-r_{l+1}$.

Оптимальное расписание построено, если найдено $r_l, l\le k$ такое, что:

$$E(r_l)+nr_l=E(0) \qquad (7)$$

Это означает, что выполняется признак 2) оптимальности допустимого расписания и r_{opt} - это одно из значений $r_l,\ r_{l-1},\ ...,\ r_{\max}$, если $l<k$.

Алгоритм А2. Полиномиальная составляющая ПДС – алгоритм нахождения оптимального расписания по критерию минимизации суммарного опережения

ШАГ 1. Построить расписания, оптимальные по критерию 2 для моментов запуска $r_{\max}$ и 0. Определить соответствующие им суммарные опережения $E(r_{\max})$ и $E(0)$.

ЕСЛИ выполняется равенство $E(r_{\max})+nr_{\max}=E(0)$, **ТО КОНЕЦ** – полученное для $r_{\max}$ расписание оптимально.

Полагаем: $l=0$ – порядковый номер смены структуры расписания; $r_0=r_{\max}$.

ШАГ 2.

2.1. $l=l+1$

2.2. Найти длину l -го интервала Δ_l (по формуле (6)).

2.3. Сдвинуть влево текущую последовательность работ на величину Δ_l: $r_l=r_{l-1}-\Delta_l$

2.4. Построить для полученного момента запуска r_l оптимальное по критерию 2 расписание.

2.5. **ЕСЛИ НЕ** выполняется равенство $E(r_l)+nr_l=E(0)$,

ТО перейти к п.2.1.

ИНАЧЕ (выполняется признак оптимальности 2). Найти $E(r_{opt})=\min\limits_{1\le l\le k}E(r_l)$

КОНЕЦ вычислений**.**

Сложность полиномиальной составляющей $kO(n^2)$, где k - заданное количество изменений структур расписания. Покажем это. Наиболее трудоемкой частью алгоритма является пункт 2.2 ШАГА 2, который состоит в нахождении длины Δ_l l -го интервала (в котором структура расписания неизменна) и соответственно момента запуска $r_l=r_{l-1}-\Delta_l$, когда после применения алгоритма А1 в оптимальном расписании по критерию 2 для хотя бы одна работа изменит позицию относительно расписания с моментом запуска r_{l-1}. Для фиксированной пары работ s и j_i, проверка: $p_s<p_{j_i},\quad d_s<C_{j_i}$ осуществляется за время $\Theta(1)$. Всего существующих пар $\frac{n(n-1)}{2}$. Таким образом, верхняя оценка количества сравниваемых пар $O(n^2)$. Пусть общее количество смен структур k. Следовательно

сложность полиномиальной составляющей $kO(n^2)$.

Если на каком-то этапе выполняется признак оптимальности 2), то точное решение находится в отрезке $[r_l, r_{\max}]$. Если же на k структурах изменения расписаний признак оптимальности 2) не выполняется, то находим минимальное значение суммарного опережения на всех дискретных моментах изменения структур. И таким образом, получим приближенное решение, но точное $\forall r \in [r_l, r_{\max}]$. Это и есть полиномиальная аппроксимация точного алгоритма. ПДС - алгоритма второго типа построен.

Примеры нахождения оптимального расписания по критерию 2.

Пример 2.
Дано: $n = 6$;
$p_1 = 99$; $p_2 = 28$; $p_3 = 62$; $p_4 = 98$; $p_5 = 45$; $p_6 = 74$;
$d_1 = 240$; $d_2 = 260$; $d_3 = 249$; $d_4 = 514$; $d_5 = 481$; $d_6 = 449$.

В соответствии с алгоритмом ***A*** найдено расписание σ с максимально возможным моментом запуска $r_{\max} = 71$. После применения алгоритма ***A1*** минимальное суммарное опережение при максимальном моменте запуска $E(r_{\max}) = 264$. Окончательный вид расписания с минимальным суммарным опережением при максимальном моменте запуска приведен в таблице 1.

Табл. 1. Расписание, оптимальное по критерию минимизации суммарного опережения при $r_{\max}$

Порядковый номер в расписании	Номер работы, j	Длительность работы, p_j	Директивный срок, d_j	Момент окончания работы, C_j	Опережение работы, E_j
1	1	99	240	170	70
2	3	62	249	232	17
3	2	28	260	260	0
4	4	98	514	358	156
5	6	74	449	432	17
6	5	45	481	477	4
					$E(r_{\max}) = E(71) = 264$

Расписание с минимальным суммарным опережением с моментом запуска 0 приведен в таблице 2.

Табл. 2. Расписание, оптимальное по критерию минимизации суммарного опережения с моментом запуска 0

Порядковый номер в расписании	Номер работы, j	Длительность работы, p_j	Директивный срок, d_j	Момент окончания работы, C_j	Опережение работы, E_j
1	1	99	240	99	141
2	3	62	249	161	88
3	2	28	260	189	71
4	4	98	514	287	227
5	6	74	449	361	88
6	5	45	481	406	75
				E_0	690

Данный пример на первом шаге применения алгоритма *A2* дает оптимальное расписание по критерию 2. Проверим это: $E(r_{\max}) + nr_{\max} = E(0)$, $264 + 6 \cdot 71 = 690$. Из признака оптимальности 1) получили оптимальное расписание по ***критерию 2***, $E(r_{\max}) = E(r_{opt})$. Задача решена.

Пример 3.
Найдем оптимальное расписание по критерию 2 для следующей задачи:
$n = 6$;
$p_1 = 2$; $p_2 = 7$; $p_3 = 5$; $p_4 = 3$; $p_5 = 1$; $p_6 = 20$;
$d_1 = 30$; $d_2 = 43$; $d_3 = 49$; $d_4 = 52$; $d_5 = 54$; $d_6 = 56$.

Посчитаем, применяя алгоритм ***A2***, суммарное опережение с моментом запуска 0. В таблице 3 приведено расписание с моментом запуска 0, оптимальное по ***критерию 2***.

Суммарное опережение $E(0) = 99$.

Для нахождения максимального момента запуска применим алгоритм ***A1***. В таблице 4 приведено расписание с $r_{\max} = 18$, оптимальное по ***критерию 2***.

Суммарное опережение $E(r_{\max}) = 73$. Признак оптимальности 1) не выполняется ($E(r_{\max}) + nr_{\max} \neq E(0)$: $73 + 6 \cdot 18 = 181 \neq 99$).

Табл. 3. Оптимальное расписание с моментом запуска 0

Порядковый номер в расписании	Номер работы, j	Длительность работы, p_j	Директивный срок, d_j	Момент окончания работы, C_j	Опережение работы, E_j
1	6	20	56	20	36
2	2	7	43	27	16
3	1	2	30	29	1
4	3	5	49	34	15
5	4	3	52	37	15
6	5	1	54	38	16

Найдем минимальное значение среди всех возможных моментов изменения структуры расписания:

$$\Delta_1 = \min_{2 \le i \le n} \left\{ \underbrace{56 - \max\{54, 52, 49, 30, 43\}}_{соотв. i=6}; \ \underbrace{35-30}_{соотв. i=4}; \ \underbrace{32-30}_{соотв. i=3} \right\} \qquad (8)$$

Табл. 4. Оптимальное расписание с моментом запуска $r_{\max}$

Порядковый номер в расписании	Номер работы, j	Длительность работы, p_j	Директивный срок, d_j	Момент окончания работы, C_j	Опережение работы, E_j
1	2	7	43	25	18
2	1	2	30	27	3
3	3	5	49	32	17
4	4	3	52	35	17
5	5	1	54	36	18
6	6	20	56	56	0

Минимум в выражении (8) соответствует позиции 6: $\Delta_1 = 56 - 54 = 2$. Составляющие выражения (8), соответствующие позициям 2 и 5, не определены в силу того, что работы, стоящие на этих позициях, не удовлетворяют условиям (6). Сдвигаем последовательность работ на величину 2: $r_1 = r_{\max} - \Delta_1 = 18 - 2 = 16$. Построим оптимальное по критерию 2 расписание для $r_1 = 16$ (таблица 5).

Суммарное опережение $E(r_1) = 63$. Признак оптимальности 2) не выполняется ($E(r_1) + nr_1 \ne E(0)$, $63 + 6 \cdot 16 = 159 \ne 99$). Найдем минимальное значение среди всех возможных моментов изменения структуры расписания:

$$\Delta_2 = \min_{2 \le i \le n} \left\{ \underbrace{53 - \max\{52, 49, 30, 43\}}_{соотв. i=5}; \ \underbrace{33-30}_{соотв. i=4} \right\} \qquad (9)$$

Табл. 5. Оптимальное расписание с моментом запуска r_1

Порядковый номер в расписании	Номер работы, j	Длительность работы, p_j	Директивный срок, d_j	Момент окончания работы, C_j	Опережение работы, E_j
1	2	7	43	23	20
2	3	5	49	28	21
3	1	2	30	30	0
4	4	3	52	33	19
5	6	20	56	53	3
6	5	1	54	54	0

Минимум в выражении (9) соответствует позиции 5: $\Delta_2 = 53 - 52 = 1$. Составляющие выражения (9), соответствующие позициям 2, 3 и 5, не определены в силу того, что работы, стоящие на этих позициях, не удовлетворяют условиям (6). Сдвигаем последовательность работ на величину 1: $r_2 = r_1 - \Delta_2 = 16 - 1 = 15$. Построим оптимальное по критерию 2 расписание для $r_2 = 15$ (таблица 6).

Табл. 6. Оптимальное расписание в момент запуска r_2

Порядковый номер в расписании	Номер работы, j	Длительность работы, p_j	Директивный срок, d_j	Момент окончания работы, C_j	Опережение работы, E_j
1	2	7	43	22	21
2	1	2	30	24	6
3	6	20	56	44	12
4	3	5	49	49	0
5	4	3	52	52	0
6	5	1	54	53	1

Суммарное опережение $E(r_2) = 40$. Признак оптимальности 2) не выполняется ($E(r_2) + nr_2 \ne E(0)$, $40 + 6 \cdot 15 = 130 \ne 99$). Найдем минимальное значение среди всех возможных моментов изменения структуры расписания:

$$\Delta_3 = \min_{2\le i\le n}\left\{\underbrace{52-30}_{соотв.i=5};\ \underbrace{49-30}_{соотв.i=4};\ \underbrace{44-\max\{30,43\}}_{соотв.i=3}\right\} \quad (10)$$

Минимум в выражении (10) соответствует позиции 3: $\Delta_3 = 44-43=1$. Составляющие выражения (10), соответствующие позициям 2 и 6, не определены в силу того, что работы, стоящие на этих позициях, не удовлетворяют условиям (6). Сдвигаем последовательность работ на величину 1: $r_3 = r_2 - \Delta_3 = 15-1=14$. Построим оптимальное по критерию 2 расписание для $r_3 = 14$ (таблица 7).

Табл. 7. Оптимальное расписание с моментом запуска r_3

Порядковый номер в расписании	Номер работы, j	Длительность работы, p_j	Директивный срок, d_j	Момент окончания работы, C_j	Опережение работы, E_j
1	1	2	30	16	14
2	6	20	56	36	20
3	2	7	43	43	0
4	3	5	49	48	1
5	4	3	52	51	1
6	5	1	54	52	2

Суммарное опережение $E(r_3)=38$. Признак оптимальности 2) не выполняется ($E(r_3)+nr_3 \ne E(0)$, $38+6\cdot 14 = 122 \ne 99$). Найдем минимальное значение среди всех возможных моментов изменения структуры расписания:

$$\Delta_4 = \min_{2\le i\le n}\left\{\underbrace{53-30}_{соотв.i=3};\ \underbrace{36-30}_{соотв.i=2}\right\} \quad (11)$$

Минимум в выражении (11) соответствует позиции 2: $\Delta_4 = 36-30=6$. Составляющие выражения (11), соответствующие позициям 4, 5 и 6, не определены в силу того, что работы, стоящие на этих позициях, не удовлетворяют условиям (6). Сдвигаем последовательность работ на величину 6: и $r_4 = r_3 - \Delta_4 = 14-6=8$. Построим оптимальное по критерию 2 расписание для $r_4 = 8$ (таблица 8).

Табл. 8. Оптимальное расписание с моментом запуска r_4

Порядковый номер в расписании	Номер работы, j	Длительность работы, p_j	Директивный срок, d_j	Момент окончания работы, C_j	Опережение работы, E_j
1	6	20	56	28	28
2	1	2	30	30	0
3	2	7	43	37	6
4	3	5	49	42	7
5	4	3	52	45	7
6	5	1	54	46	8

Суммарное опережение $E(r_4)=56$. Признак оптимальности 2) не выполняется ($E(r_4)+nr_4 \ne E(0)$, $56+6\cdot 8 = 104 \ne 99$).

Найдем минимальное значение среди всех возможных моментов изменения структуры расписания:

$$\Delta_5 = \min_{2\le i\le n}\left\{\underbrace{45-30}_{соотв.i=5};\ \underbrace{42-30}_{соотв.i=4};\ \underbrace{37-30}_{соотв.i=3}\right\} \quad (12)$$

Минимум в выражении (12) соответствует позиции 3: $\Delta_5 = 37-30=7$. Составляющие выражения (12), соответствующие позициям 6 и 2, не определены в силу того, что работы, стоящие на этих позициях, не удовлетворяют условиям (6). Сдвигаем последовательность работ на величину 7: и $r_5 = r_4 - \Delta_5 = 8-7=1$. Построим оптимальное по критерию 2 расписание для $r_5 = 1$ (таблица 9).

Табл. 9. Оптимальное расписание с моментом запуска r_5

Порядковый номер в расписании	Номер работы, j	Длительность работы, p_j	Директивный срок, d_j	Момент окончания работы, C_j	Опережение работы, E_j
1	6	20	56	21	35
2	2	7	43	28	15
3	1	2	30	30	0
4	3	5	49	35	14
5	4	3	52	38	14
6	5	1	54	39	15

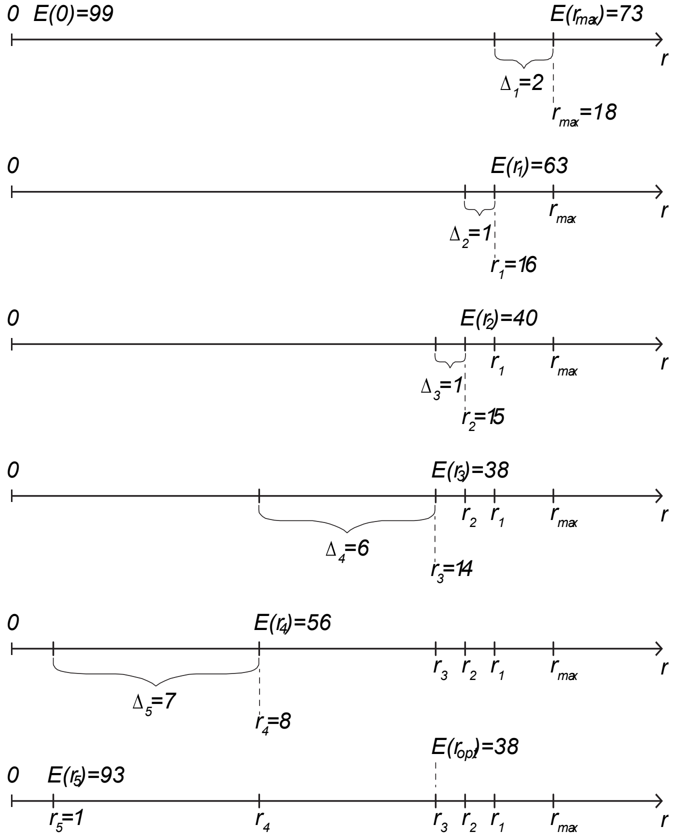

Рис.4. Пошаговый процесс нахождения оптимального расписания по критерию минимизации суммарного опережения

Суммарное опережение $E(r_5)=93$. Проверим, выполнение признака оптимальности 2). Признака оптимальности 2) допустимого расписания выполняется ($E(r_5)+nr_5 \neq E(0)$ $E_{r_5}+nr_5=E_0$, $93+6\cdot 1=99$). Оптимальное расписание построено. При этом r_{opt} находится в отрезке $[1,18]$. Найдем $E(r_{opt})=\min\limits_{1\le l\le 5} E(r_l)=38$. Таким образом, оптимальное расписание по критерию 2 совпадает с расписанием в момент запуска r_3 (см.таблица 7). Проиллюстрируем процесс решения графически (рисунок 4).

Выводы

Рассмотрена актуальная задача теории расписаний выполнения множества работ с различными директивными сроками одним прибором, в которых все работы должны быть выполнены без нарушения их директивных сроков и минимизировано суммарное отклонение моментов окончания работ от их директивных сроков. Данная задача найдет широкое применение в современных условиях планирования точно в срок. Проведено исследование свойств этой задачи. Определены условия признака оптимальности расписания по критерию минимизации суммарного опережения выполнения работ и на их основе разработан ПДС - алгоритм нахождения оптимального расписания.

Список литературы

1. Згуровский М. З. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами [Текст]: монография / М. З. Згуровский, А. А. Павлов. – К.: Наукова думка, 2010.– 573 с.
2. Павлов А.А. Исследование свойств задачи календарного планирования для одного прибора по критерию минимизации суммарного опережения заданий при условии допустимости расписании / А. А. Павлов, Е.Б. Мисюра, О.А. Халус // Вісник НТУУ "КПІ". Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: "ВЕК+", 2012. – №56.– С. 98–102.
3. Згуровский М.З. Задача построения допустимого расписания с максимально поздним моментом запуска и минимальным суммарным опереженем / М.З.Згуровский, А. А. Павлов, О.А. Халус // // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 3. — 12 с.
4. Павлов А.А. ПДС-алгоритмы решения задач составления расписаний по критерию опережения/запаздывания на одном приборе [Текст] / А.А. Павлов, Е.Б. Мисюра // Вісник НТУУ "КПІ". Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: "ВЕК+", 2014. – №60. – 16 с.