УДК 519.854.2

ЗГУРОВСКИЙ М.З.,
ПАВЛОВ А.А.,
МИСЮРА Е.Б.

МИНИМИЗАЦИЯ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ ДОПУСТИМОГО РАСПИСАНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ДИРЕКТИВНЫМИ СРОКАМИ

В статье разработаны ПДС-алгоритмы решения задач составления расписаний выполнения независимых работ с директивными сроками параллельными приборами равной и разной производительности по векторному (лексикографическому) либо скалярному критерию максимизации минимального момента начала работы приборов. На основе созданных ранее признаков оптимальности допустимых решений разработаны алгоритмы, реализующие полиномиальную составляющую ПДС-алгоритма и полиномиальную аппроксимацию точного алгоритма решения рассматриваемых задач – эвристические или приближенные алгоритмы с оценкой отклонения от оптимального решения.

In the paper the PDC-algorithms are developed for scheduling problems of processing independent jobs with due dates on parallel machines with equal and different performance ratios with the vector (lexicographical) or scalar criterion of maximization the minimum moment of the processing start on machines. On the basis of previously created signs of optimality of the feasible solutions the algorithms are developed that implement the polynomial component of the PDC-algorithm and polynomial approximation of exact algorithm for the problems solution – heuristic or approximate algorithms with the estimate of deviation from the optimal solution.

Введение

В [1, 2, 3] изложен новый подход к решению *NP*-полных задач достаточно большой размерности, сформировавшийся как теория ПДС-алгоритмов. ПДС-алгоритмом называется алгоритм [1], состоящий из полиномиальной составляющей и экспоненциального подалгоритма либо полиномиальной аппроксимации точного алгоритма (приближенного или эвристического алгоритма), которые могут содержать условия декомпозиции исходной задачи на подзадачи меньшей размерности [1, гл. 3]. Полиномиальная составляющая порождается логико-аналитическими условиями (*p*-условиями), выполнение которых допустимым решением, полученным в результате реализации полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма, определяет его как оптимальное. *p*-условия находятся в результате теоретических исследований соответствующего класса труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации. Полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма синтезируется таким образом, чтобы последовательная процедура конструирования допустимых решений была наиболее эффективной с точки зрения реализации *p*-условий (достаточных признаков оптимальности допустимых решений). Верхняя оценка сложности полиномиальной составляющей известна. Иногда экспоненциальная составляющая ПДС-алгоритма заменяется алгоритмом полиномиальной сложности, приводящим к приближенному (субоптимальному) решению [1].

В [4] формулируется ряд новых одноэтапных задач календарного планирования, для каждой из которых находятся *p*-условия (признаки оптимальности допустимого решения). Полученные результаты реализуют возможность построения для этих классов комбинаторных задач оптимизации эффективных ПДС-алгоритмов.

Таким образом, расширяется класс задач, для которых могут быть построены ПДС-алгоритмы. Приведенные в данной статье задачи не исследовались на предмет того, к какому классу задач (*P* или не проще, чем *NP*-полные) они относятся. Однако это не суть важно – ПДС-алгоритм может оказаться необходимой вычислительной процедурой и в случаях, когда:

а) неизвестен точный полиномиальный алгоритм решения задачи;

б) точный полиномиальный алгоритм известен, но его вычислительная сложность существенно выше вычислительной сложности полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма, и при этом статистически значимо полиномиальная составляющая реализуется при произвольном моделировании индивидуальных задач.

В данной статье разработаны ПДС-алгоритмы решения задач 4.1 и 5.1 из [4]. Каждый из них включает как несколько алгоритмов, реализующих полиномиальную составляющую (p-составляющую), так и несколько алгоритмов, реализующих полиномиальную аппроксимацию точного алгоритма решения рассматриваемой задачи (предлагаются эвристические алгоритмы и приближенные алгоритмы с оценкой отклонения от оптимального решения). Это связано с тем, что в зависимости от исходных данных конкретный алгоритм дает лучшее решение, чем другие (заранее неизвестно, какой алгоритм окажется лучшим).

Задача 4.1 [4]. Приборы равной производительности

Определение 1. Расписание называется допустимым, если в нем нет запаздывающих работ. Работа называется допустимой, если она выполняется без запаздывания.

Постановка задачи. Имеется m независимых параллельных приборов равной производительности, работающих без прерываний, которые выполняют n работ (l_i – длительность выполнения i-й работы, $i=\overline{1,n}$). Работы должны быть выполнены к директивным срокам d_i. Моменты запуска приборов произвольны. Необходимо построить допустимое расписание, максимизирующее один из двух критериев:

Критерий 1.

$$r_{j_1}=\max\{\min_{i=\overline{1,m}} r_i\}$$
$$r_{j_l}=\max\{\min_i r_i, i=\overline{1,m}, i\neq i_k, k=\overline{1,l-1}\}, l=\overline{2,m}, \quad (1)$$

где r_j – момент запуска прибора j, i_1 – номер прибора, у которого момент запуска в оптимальном расписании самый ранний (он является самым поздним для всех допустимых расписаний); j_l, $l=\overline{2,m}$ – номер прибора, у которого момент запуска следующий по величине после приборов j_k, $k=\overline{1,l-1}$ (он является самым поздним для всех допустимых расписаний с фиксированным r_{j_k}, $k=\overline{1,l-1}$).

Определение 2. Допустимое расписание, у которого моментами запуска приборов являются $r_{j_l}, l=\overline{1,m}$, называется оптимальным по прямому лексикографическому порядку.

Примечание. Допустимое расписание называется оптимальным по обратному лексикографическому порядку, если для него выполняется:

$$r_{j_1}=\max\{\max_{i=\overline{1,m}} r_i\}$$
$$r_{j_l}=\max\{\max_i r_i, i=\overline{1,m}, i\neq i_k, k=\overline{1,l-1}\}, l=\overline{2,m}.$$

Критерий 2. Допустимое расписание является оптимальным по критерию 2, если для него выполняется:

$$r_{j_1}=\max\{\min_{i=\overline{1,m}} r_i\}. \quad (2)$$

Признаки оптимальности допустимого решения по векторному критерию (1).

Обозначим через I множество всех работ $\{i$: $i=\overline{1,n}\}$.

Очевидно, выполняются неравенства $d_i - l_i \geq 0$, $i=\overline{1,n}$. Перенумеруем работы по неубыванию чисел $d_i - l_i$, и пусть при этом выполняются неравенства $d_1 - l_1 < d_2 - l_2 < \ldots < d_n - l_n$.

В статье [4] сформулированы и доказаны достаточные признаки оптимальности №1 и №2, которые позволили сконструировать полиномиальную составляющую ПДС-алгоритма для рассматриваемой задачи.

Признак оптимальности №1 допустимого расписания.

п. 1. На первый прибор первой назначаем работу с индексом 1. $r_1 = d_1 - l_1$. Числу r_1 соответствует максимально возможное значение r_{j_1} в (1). Пусть выполняются следующие неравенства: $d_i + l_k > d_k$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{i+1,m}$. Тогда назначаем на k-й прибор, $k=\overline{2,m}$, первой работу с индексом k и моментом запуска прибора $r_k = d_k - l_k$.

Утверждение 1 [4]. Произвольное допустимое расписание, для которого выполнен п. 1, является оптимальным по критерию (1).

Признак оптимальности №2 допустимого расписания.

п. 2. На первый прибор первой назначается работа с индексом 1. $r_1 = d_1 - l_1$ ($d_1 - l_1$ – это максимально большое возможное значение r_{j_1} в (1)). Пусть $k_2 - 1$ – максимальное натуральное число, для которого выполняются неравенства:

$$d_1+\sum_{i=2}^{l} l_i \leq d_l, l=\overline{1,k_2-1}. \quad (3)$$

Тогда на первый прибор последовательно назначаются работы с индексами 1, 2, …, $k_2 - 1$. Работа с индексом k_2 назначается первой на второй прибор, $r_2 = d_{k_2} - l_{k_2}$. Если неравенство

$$\min\{d_1+\sum_{i=2}^{k_2-1} l_i + l_{k_2+1}, d_{k_2}+l_{k_2+1}\} \leq d_{k_2+1}$$

не выполняется, тогда на третий прибор первой назначается работа с индексом $k_2 + 1$ в момент времени $r_3 = d_{k_2+1} - l_{k_2+1}$. В этом случае $k_3 = k_2 + 1$. В противном случае должны выполняться неравенства:

$$\min\{d_1 + \sum_{i=2}^{k_2-1} l_i,\, d_{k_2} + l_{k_2+1}\} \le d_{k_2+1}, \qquad (4)$$

$$\max\{d_1 + \sum_{i=2}^{k_2-1} l_i,\, d_{k_2} + l_{k_2+1}\} > d_{k_2+1}. \qquad (5)$$

Тогда работа с индексом $k_2 + 1$ назначается на прибор, которому соответствует минимум в (4). Если неравенство (4) выполнено, а неравенство (5) нарушается, то признак оптимальности №2 допустимого расписания для данной индивидуальной задачи нарушен. Аналогично последовательно назначаются на первый либо второй прибор работы с индексами $\overline{k_2+2, k_3-1}$ (k_3 – максимально возможное натуральное число). При этом, если текущая работа может быть назначена на прибор с меньшим моментом начала обслуживания, то назначение ее на прибор с большим моментом времени начала обслуживания должен приводить к нарушению директивного срока (аналог выполнения неравенств (4), (5)). Работа с индексом k_3 первой назначается на третий прибор в момент времени $r_3 = d_{k_3} - l_{k_3}$.

Аналогично происходит дальнейшее последовательное назначение работ с индексами $k_3 + i$ на приборы. Необходимым условием выполнения признака оптимальности №2 является требование, что распределяемая работа может быть назначена только на один прибор (с минимальным временем освобождения) из текущего множества приборов, на которые производится назначение работ. Если ни на один прибор из текущего множества приборов работа не может быть назначена, она назначается первой на следующий прибор в момент времени, равный директивному сроку этой работы минус ее длительность. Распределение работ заканчивается либо когда все работа распределены на l приборов ($l < m$), либо назначением на m-й прибор первой k_m-й работы $r_m = d_{k_m} - l_{k_m}$. Распределение работ в соответствии с п. 2 завершено.

Пусть I_1 – множество работ, которое содержит все работы с индексами из множества $\{\overline{1, k_m}\}$ либо $\{\overline{1, k_l}\}$, если работы распределились на l приборах ($l < m$). Потребуем выполнения следующего условия. Перенумеруем все работы из множества I_1 в порядке их назначения на приборы. Тогда для каждой работы с индексом i ($i = \overline{2, k_m \vee k_l}$) должно выполняться

$$d_i - C_i < l_p,\; p = \overline{i+1, k_m \vee k_l}, \qquad (6)$$

где C_i – момент окончания выполнения i-й работы. Тогда имеет место утверждение:

Утверждение 2 [4]. Произвольное допустимое расписание, для которого выполнен п. 1 либо п. 2 и условие (6), является оптимальным по критерию (1), т.е.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \succcurlyeq \forall \begin{pmatrix} r_{q_1} \\ r_{q_2} \\ \vdots \\ r_{q_m} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

в соответствии с предпорядком – лексикографическим порядком, где $(r_{q_1} \ldots r_{q_m})^{\mathrm{T}}$ – вектор моментов запуска приборов произвольного допустимого расписания, компоненты которого расположены в прямом лексикографическом порядке, т.е. первая компонента наименьшая, вторая – следующая по величине и т.д., а $(r_1 \ldots r_m)^{\mathrm{T}}$ соответствует допустимому расписанию, у которого выполнен п. 1 либо п. 2 и условие (6) (компоненты вектора $(r_1 \ldots r_m)^{\mathrm{T}}$ по построению расположены в соответствии с прямым лексикографическим порядком).

Условие (7) соблюдается, если $r_1 > r_{q_1}$, либо если $r_1 = r_{q_1}$ и $r_2 > r_{q_2}$, либо $r_1 = r_{q_1}$ и $r_2 = r_{q_2}$, но $r_3 > r_{q_3}$, и т.д., либо $r_j = r_{q_j}, j = \overline{1, m}$.

Аналогично (7) по прямому лексикографическому порядку сравниваются два произвольных вектора.

Примечание. Если в соответствии с п. 2 загруженными оказались l приборов ($l < m$), то в (7) r_{l+i}, $j = \overline{1, m-l}$, формально принимают значения $+\infty$.

Примечание. Если все работы распределены по l приборам, $l < m$, то построено оптимальное расписание по критерию (1).

Признак оптимальности допустимого решения по скалярному критерию (2).

На первый прибор первой назначаем работу с индексом 1. $r_1 = d_1 - l_1$. Числу r_1 соответствует максимально возможное значение r_{i_1} в (2).

Утверждение 3. Произвольное допустимое расписание, у которого $r_i \ge r_1$, $j = \overline{2, m}$, является оптимальным по критерию (2).

ПДС-алгоритм решения задачи 4.1 [4] по критерию (1) (алгоритм А)

р-составляющая ПДС-алгоритма. Полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма состоит из пяти алгоритмов, которые реализуются последовательно в произвольном порядке. Первый алгоритм, построивший допустимое расписание, для которого выполнен признак оптимальности №1 или №2, реализует оптимальное решение задачи по критерию (1).

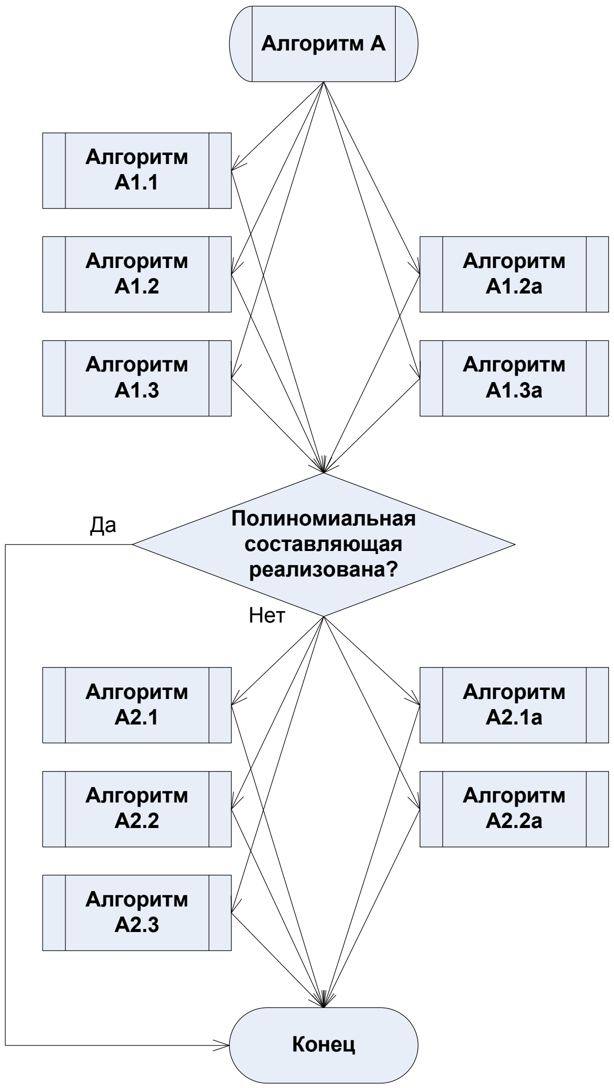

Рис. 1. Схема ПДС-алгоритма А

Алгоритм А1.1

Алгоритм реализует полиномиальную составляющую для построения допустимого расписания, если построено начальное расписание в соответствии с признаком оптимальности допустимого решения №1 либо №2. В результате исходное множество работ I разбивается на два подмножества: I_1 – множество работ, предварительно назначенных на выполнение, и I_1' – множество еще не назначенных работ, которые упорядочиваются по возрастанию значений $d_i - l_i$ (последовательность $\sigma^{\text{уп}}$). Для каждого прибора k известен момент освобождения после выполнения назначенных работ C_k. Дальнейшее назначение работ из последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ на выполнение осуществляется следующим образом: каждая очередная работа назначается на выполнение на прибор с минимальным моментом освобождения. Если работа не запаздывает, итерация окончена, пересчитываем момент освобождения, переходим к следующей работе из упорядоченной последовательности работ $\sigma^{\text{уп}}$. Если работа запаздывает, полиномиальная составляющая не реализована, алгоритм окончен. Если в результате такого распределения все работы выполняются без запаздывания, то полиномиальная составляющая реализована.

Алгоритмы А1.2, А1.2а

Алгоритмы применяются для случая, когда начальное расписание реализует признак оптимальности №1.

Алгоритмы А1.2, А1.2а – это алгоритмы А2.1, А2.1а (см. ниже на стр. 7) с учетом следующего ниже примечания А.

Примечание А. Алгоритм распределяет все работы, кроме работ, принадлежащих начальному расписанию. После выполнения алгоритма проверяется выполнение следующего условия: на каждом приборе момент запуска прибора не должен быть меньше, чем момент окончания выполнения первой работы на этом приборе в соответствии с начальным расписанием. Если это условие не выполняется, полиномиальная составляющая не реализована данным алгоритмом. Иначе для получения оптимального расписания необходимо сдвинуть полученное приближенным алгоритмом расписание на этом приборе влево так, чтобы момент начала выполнения первой работы приближенного расписания на каждом приборе совпадал с моментом окончания выполнения первой работы начального расписания на этом приборе (чтобы все приборы работали без прерываний).

Алгоритмы А1.3, А1.3а

Алгоритмы применяются для случая, когда начальное расписание реализует признак оптимальности №1.

Алгоритмы А1.3, А1.3а – это алгоритмы А2.2, А2.2а (см. ниже на стр. 9) с учетом примечания А (стр. 7).

Полиномиальная аппроксимация точного алгоритма решения задачи состоит из пяти алгоритмов, задача решается каждым из них и выбирается решение, наилучшее в соответствии с прямым лексикографическим порядком (7).

Алгоритмы А2.1, А2.1а

В основу алгоритма А2.1 положен принцип последовательного группового назначения с использованием локально оптимального обратного лексикографического порядка.

Алгоритм состоит из ряда однотипных итераций. Каждая итерация, кроме первой, включает предварительный этап и назначение работ на выполнение, которое осуществляется по групповому принципу (группами из m работ – по одной работе на каждый прибор). Назначение работ осуществляется в обратном порядке: на первой итерации алгоритма на каждый прибор назначается по одной работе, момент окончания выполнения которой совпадает с ее директивным сроком, а моменты запуска их на выполнение соответствуют глобальному оптимуму по обратному лексикографическому порядку (для каждой работы находится прибор, момент запуска которого для этой работы является самым поздним; первой назначается работа на прибор с самым поздним моментом запуска, затем следующая работа – на прибор со следующим по величине моментом запуска, и так, пока не будет назначено m работ на m приборов).

Примечание. Множество приборов, из которых находится прибор со следующим по величине моментом запуска, не включает в себя приборы, на которых ранее были назначены работы на первой итерации.

На текущей итерации распределяется множество работ из еще не назначенных на приборы на предыдущих итерациях. На предварительном этапе находятся работы, для каждой из которых существует не менее одного прибора, на котором она является допустимой (работа, назначенная на этот прибор, выполняется без срыва ее директивного срока). Сначала осуществляется назначение допустимых работ в соответствии с локально оптимальным обратным лексикографическим порядком (первой назначается допустимая работа на прибор с самым поздним моментом запуска, затем следующая работа на прибор со следующим по величине максимальным моментом запуска, и т.д., пока все допустимые работы не будут назначены).

Примечание. Множество приборов, из которых находится прибор со следующим по величине моментом запуска, не включает в себя приборы, на которых ранее были назначены работы на текущей итерации.

Если на все приборы назначено по одной работе, текущая итерация закончена.

В результате такого распределения могут остаться работы, для каждой из которых не существует приборов, на которых они допустимы. Они объединяются во вторую группу работ для текущей итерации. Распределение работ на приборы второй группы также осуществляется локально оптимально в соответствии с обратным лексикографическим порядком (аналогично распределению по приборам допустимых работ).

Примечание. В отличие от первой группы работ, назначение работы на прибор осуществляется с учетом сдвига момента запуска работы (и всего расписания работ, уже назначенных на этот прибор предыдущими итерациями) на величину срыва ее директивного срока.

Примечание. Множество приборов, из которых находится прибор со следующим по величине моментом запуска, не включает в себя приборы, на которых ранее были назначены работы на текущей итерации. Итерации продолжаются до получения моментов начала выполнения первых работ на каждом приборе.

Для повышения эффективности алгоритма A2.1 его последним шагом является алгоритм корректировки моментов начала выполнения работ АК.

Алгоритм корректировки АК.

1. Выбираем прибор с минимальным значением начала выполнения работ $r_{\min}$ и первую работу на этом приборе последовательно ставим на каждый прибор (если работа запаздывает, то сдвигаем ее и работы, назначенные на этот прибор на предыдущих итерациях, влево на величину запаздывания), определяя, на каком приборе у этой работы будет максимально поздний момент начала выполнения, и если он больше $r_{\min}$, то осуществляем перестановку ее на этот прибор. Определяем новые моменты начала выполнения работ.

2. Аналогичным образом, ищем следующий прибор с минимальным значением начала выполнения работ и пытаемся переставить первую работу с этого прибора на прибор, на котором момент ее начала выполнения будет больше.

3. Такие перестановки выполняются, пока возможно увеличение $r_{\min}$.

Примечание. Алгоритм корректировки является последним шагом всех алгоритмов полиномиальной аппроксимации точного алгоритма для задач 4.1 и 5.1.

Алгоритм A2.1а отличается тем, что последним шагом текущей итерации является проверка выполнения неравенства

$$\max_{i=1,m} r_i^{\text{тек}} - \min_{i=1,m} r_i^{\text{тек}} > K_{\text{эксп}},$$

где $r_i^{\text{тек}}$ – момент запуска прибора i после текущей итерации, $K_{\text{эксп}}$ – допустимая величина, определяемая экспериментально. Если неравенство выполняется, то реализуется алгоритм АК для расписания, построенного итерациями с первой до текущей включительно, после чего выполняется переход к следующей итерации.

Обоснование группового назначения алгоритма А2.1. Логично на каждой итерации назначать работы на приборы локально оптимально по прямому лексикографическому порядку. Однако реализация такой стратегии приведет к полному перебору всех вариантов назначения. Поэтому эвристическое назначение выполняется локально оптимально по обратному лексикографическому порядку в предположении, что назначение это мало отличается от назначения локально оптимально по прямому лексикографическому порядку. Кроме того, эффективность такого назначения подтверждается следующими тремя утверждениями.

Утверждение 4. Рассмотрим текущую итерацию алгоритма и множество приборов J, для каждого из которых существует непустое множество I_j допустимых работ. Для $\forall j \in J$ допустимые работы из I_j на данной итерации назначаются на прибор j без запаздывания. Для каждого прибора $j \in J$ находим работу $i \in I_j$ с максимальным моментом начала выполнения, пусть это работа $i_j^{\max}$. Если все работы $i_j^{\max}$ различны, то моменты начала выполнения работ $i_j^{\max}$, назначенных на текущей итерации на прибор j, $\forall j \in J$, являются оптимальными как по обратному, так и по прямому лексикографическому порядку, по сравнению с любым другим набором допустимых работ, назначенных на приборы $j \in J$ в любом допустимом порядке.

Доказательство утверждения очевидным образом вытекает из правил нахождения работ $i_j^{\max}$.

Утверждение 5. Пусть для каждого прибора второй группы находится работа с самым поздним моментом начала выполнения, и эти работы различны на всех этих приборах. Тогда назначение на эти приборы одинаково как по прямому, так и по обратному лексикографическому порядку.

Доказательство вытекает из правил построения расписания.

Утверждение 6. Множество допустимых работ, назначаемых алгоритмом А2.1 на данной итерации, моменты начала выполнения которых являются оптимальными по обратному лексикографическому порядку, одновременно являются лучшими по прямому лексикографическому порядку по сравнению с моментами начала выполнения любого другого допустимого множества работ, назначенных на те же приборы, что и назначенные алгоритмом А2.1 на данной итерации.

Доказательство. Пусть $C = B \setminus A \neq \varnothing$, где A – множество допустимых работ, назначенных алгоритмом А2.1, B – произвольное множество допустимых работ, назначенных на те же приборы, что и работы, назначенные алгоритмом А2.1 из множества A, и при этом для назначенных работ множества C выполняется: наиболее поздний момент начала выполнения каждой допустимой работы из множества C не принадлежит множеству моментов начала выполнения работ из множества A, назначенных алгоритмом А2.1. Утверждение доказано.

Предположительно, при решении задачи алгоритмом А2.1 большее число работ выполняется точно в срок, чем при решении задачи другими аппроксимационными алгоритмами.

Алгоритм А2.2

Алгоритм А2.2 основан на построении в явном виде локально оптимального обратного лексикографического порядка.

Алгоритм состоит из первой и ряда однотипных итераций. Первая итерация полностью совпадает с первой итерацией алгоритма А2.1.

На текущей итерации распределяется множество работ из еще не назначенных на приборы на предыдущих итерациях. Для каждой работы находим момент запуска на каждый прибор с учетом сдвига всего расписания, назначенного на этот прибор, на величину запаздывания этой работы (если оно существует). Далее назначение работ на приборы осуществляется оптимально в соответствии с обратным лексикографическим порядком (сначала назначается работа на прибор с максимально поздним моментом запуска, затем следующая работа на прибор со следующим максимально поздним моментом запуска и т.д., пока не будут назначены работы на каждый прибор).

Примечание. Множество приборов, из которых находится прибор со следующим по величине моментом запуска, не включает в себя приборы, на которых ранее были назначены работы на текущей итерации.

Итерации продолжаются до получения моментов начала выполнения первых работ на каждом приборе. Последним шагом является алгоритм корректировки АК.

Алгоритм А2.2а отличается тем, что последним шагом текущей итерации является проверка выполнения неравенства

$$\max_{i=\overline{1,m}} r_i^{\text{тек}} - \min_{i=\overline{1,m}} r_i^{\text{тек}} > K_{\text{эксп}}$$

и реализация алгоритма АК, если оно выполняется.

Утверждение 7. Пусть для каждого прибора найдены работы с самым поздним моментом начала выполнения, и пусть для всех приборов эти работы различны. Тогда распределение одинаково как по прямому, так и по обратному лексикографическому порядку.

Доказательство вытекает из правил построения расписания.

Алгоритм А2.3

Приближенный алгоритм А2.3 – алгоритм полиномиальной сложности для построения допустимого расписания, у которого предварительно работы из множества всех работ I назначены в соответствии с признаком оптимальности допустимого решения №1 либо №2. Если такое расписание построить не удалось, оно строится по признаку оптимальности №2 без учета условий (4), (5) или их аналогов, а также условия (6), при этом строгие неравенства не обязательны: $d_1 - l_1 \le d_2 - l_2 \le \quad \le \ldots \le d_n - l_n$. Алгоритм А2.3 является эвристическим.

В результате построения начального расписания исходное множество работ I разбивается на два подмножества: I_1 – множество работ, предварительно назначенных на выполнение, и I_1' – множество еще не назначенных работ, которые упорядочиваются по неубыванию значений $d_i - l_i$ (последовательность $\sigma^{уп}$, строгие неравенства не обязательны). Для каждого прибора k известен момент освобождения после выполнения назначенных работ C_k. Дальнейшее назначение работ осуществляется следующим образом. Выбираем очередную работу из последовательности $\sigma^{уп}$ и назначаем на прибор с минимальным временем освобождения. Если работа не запаздывает, итерация окончена, пересчитываем момент освобождения прибора, переходим к следующей работе. Если работа запаздывает, то она назначается на каждый прибор, все назначенные на этот прибор работы сдвигаются влево на величину запаздывания назначаемого задания. Получаем m расписаний, которым соответствуют m векторов текущих моментов запуска приборов. Выбираем наилучший вектор по прямому лексикографическому порядку (7) и назначаем запаздывающую работу на прибор, которому соответствует наилучший по (7) вектор моментов запуска, с учетом сдвига расписания на величину срыва директивного срока. Последним шагом является алгоритм корректировки АК.

ПДС-алгоритм решения задачи 4.1 [4] по критерию (2) (алгоритм Б)

Критерий (2) описан на стр. 5, признаки оптимальности допустимого решения – на стр. 6.

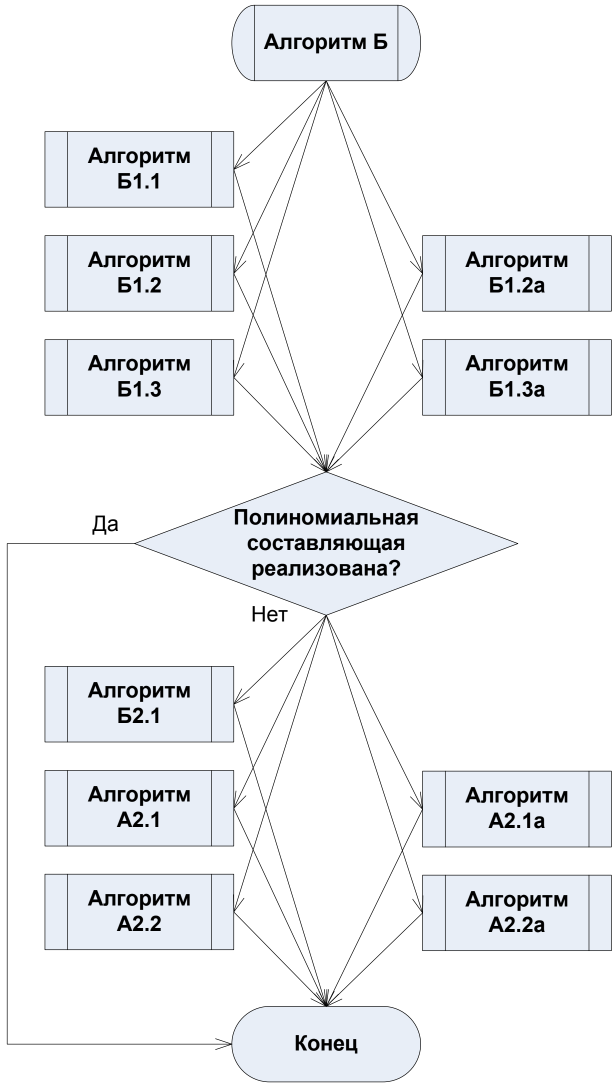

Рис. 1. Схема ПДС-алгоритма Б

p-составляющая ПДС-алгоритма. Полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма состоит из пяти алгоритмов, которые реализуются последовательно в произвольном порядке. Первый алгоритм, построивший допустимое расписание, для которого выполнен признак оптимальности, реализует оптимальное решение задачи по критерию (2).

Алгоритм Б1.1

Алгоритм реализует полиномиальную составляющую для построения допустимого расписания, если начальное расписание формируется в соответствии с признаком оптимальности №2 для критерия (1) без учета выполнения условий (4), (5) или их аналогов, а также условия (6), при этом строгие неравенства не обязательны: $d_1 - l_1 \le d_2 - l_2 \le \ldots \le d_n - l_n$. В результате исходное множество работ I разбивается на два подмножества: I_1 – множество работ, предварительно назначенных на выполнение, и I_1' – множество еще не назначенных работ, которые упорядочиваются по неубыванию значений $d_i - l_i$ (последовательность $\sigma^{уп}$). Для каждого прибора k известен момент освобождения после выполнения назначенных работ C_k. Дальнейшее назначение работ осуществляется следующим образом. Выбираем очередную работу из последовательности $\sigma^{уп}$ и назначаем на прибор с минимальным временем освобождения, если она на нем оказывается допустимой (если прибор с минимальным временем освобождения – первый, то на него назначается только допустимая работа, если на первом приборе работа запаздывает, то она назначается на другой прибор со следующим по величине минимальным временем освобождения). Если на приборе с минимальным временем освобождения она запаздывает, то расписание всех назначенных на приборе работ сдвигается влево на величину ее запаздывания и проверяется новый момент запуска: если $r^{нов} \geq r_1$, работу назначаем, если $r^{нов} < r_1$, полиномиальная составляющая этим алгоритмом не реализована, конец алгоритма. В противном случае, переходим к аналогичному распределению следующей работы из последовательности $\sigma^{уп}$, и т.д. Алгоритм завершается построением оптимального расписания по критерию (2) либо установлением факта невозможности его построения этим алгоритмом.

Алгоритмы Б1.2, Б1.2а

Алгоритмы Б1.2, Б1.2а – это алгоритмы А2.1, А2.1а (см. выше) с учетом следующего ниже примечания Б.

Примечание Б. Начальное расписание состоит из первой работы, назначенной на первый прибор с моментом запуска r_1 (см. признак оптимальности по критерию (2)). После выполнения алгоритма, который распределяет все работы, кроме первой, проверяются следующие условия: в полученном расписании момент начала выполнения первой работы приближенного расписания на первом приборе должен быть не меньше, чем d_1 (момент окончания выполнения первой работы начального расписания на первом приборе, назначенной в соответствии с признаком оптимальности), а момент запуска начальных работ приближенного расписания на остальных приборах должен быть не меньше, чем r_1. Если эти условия выполняются, то для получения оптимального расписания необходимо сдвинуть влево расписание работ на первом приборе, полученное приближенным алгоритмом, так, чтобы момент начала выполнения первой работы приближенного расписания совпадал с моментом окончания выполнения первой работы начального расписания d_1. Если момент начала выполнения первой работы приближенного расписания на первом приборе меньше, чем d_1, а моменты запуска остальных приборов не меньше, чем r_1, то первую работу приближенного расписания на первом приборе поочередно ставим на остальные приборы и переставляем ее на тот прибор, на котором момент начала выполнения этой работы будет самым большим и не меньше, чем r_1. Если такой прибор найти не удалось, полиномиальная составляющая не реализована. Если же первая работа переставлена на другой прибор, проверяем условие: если момент запуска второй работы на первом приборе больше, чем d_1, то путем сдвига расписания на первом приборе до момента d_1 получаем оптимальное расписание. Если же в приближенном расписании момент запуска второй работы на первом приборе меньше, чем d_1, пытаемся перенести на другой прибор вторую работу приближенного расписания на первом приборе. Описанная процедура повторяется, пока либо не получено оптимальное расписание, либо полиномиальная составляющая этим алгоритмом не реализуется.

Алгоритмы Б1.3, Б1.3а

Алгоритмы Б1.3, Б1.3а – это алгоритмы А2.2, А2.2а (см. выше) с учетом примечания Б (стр. 11).

Полиномиальная аппроксимация точного алгоритма решения задачи содержит пять алгоритмов – приближенные алгоритмы А2.1, А2.1а, А2.2, А2.2а (см. выше), в силу того, что производится корректировка моментов начала выполнения работ алгоритмом АК (стр. 8), а также алгоритм Б2.1. Задача решается каждым из этих алгоритмов и выбирается решение, которому соответствует наилучший $\max\{\min_j r_j\}$, $j = \overline{1,n}$.

Алгоритм Б2.1

Алгоритм Б2.1 является модификацией алгоритма Б1.1 (см. выше на стр. 10) со следующим отличием. Если новый момент запуска прибора $r^{нов} < r_1$, запаздывающая работа ставится на первый прибор и сдвигается расписание первого прибора на величину ее запаздывания, после чего эта работа назначается либо на первый прибор, либо на прибор с текущим моментом запуска $r^{нов}$, в зависимости от того, где больше текущий момент запуска. Для дальнейших итераций этот прибор становится аналогом первого. Процедура назначения продолжается аналогично до распределения всех работ. На последнем шаге алгоритма применяем алгоритм корректировки АК.

Оценка отклонения решения от оптимального. Алгоритм полиномиальной аппроксимации является приближенным по критерию (1) или (2), если реализуется начальная часть признака оптимальности (реализуется назначение начального расписания). Тогда существует оценка отклонения решения, полученного приближенным алгоритмом, от оптимального.

По критерию (1): с этой целью производим сравнение векторов по условию (7).

Примечание. Пусть $r_l > r_{q_l}$, где l – номер компоненты, для которой достигается первая положительная разность, т.е. $r_j = r_{q_j}, j = \overline{1, l-1}$. Тогда знаки разностей остальных компонент $(j = \overline{l+1, m})$ могут быть любыми. Лицо, принимающее решение, анализирует полученное решение и выбирает оптимальное или приближенное решение, исходя из практических соображений.

По критерию (2): оценка задается разностью $r_1 - r_{q_1} \geq 0$ (все алгоритмы Б2.1, А2.1, А2.1а, А2.2, А2.2а являются приближенными по критерию (2)).

Примечание. Для критерия (1) алгоритмы А2.1, А2.1а, А2.2, А2.2а являются приближенными, если существует начальное расписание в соответствии с признаком оптимальности №1. Алгоритм А2.3 является приближенным, если существует начальное расписание в соответствии с признаком оптимальности №1 или №2.

Задача 5.1 [4]. Приборы разной производительности

Постановка задачи. Имеется m независимых параллельных приборов разной производительности, работающих без прерываний, которые выполняют n работ. l_i^j – длительность выполнения i-й работы на j-м приборе, длительности работ не связаны между собой (возможна ситуация, что одна работа выполняется быстрее другой на одном приборе и медленнее другой на другом приборе). Работы должны быть выполнены к директивным срокам d_i. Моменты запуска приборов произвольны. Необходимо построить допустимое расписание, оптимальное по критерию (1) либо (2).

Обозначим через I множество всех работ $\{i: i = \overline{1, n}\}$.

Для задачи 5.1 очевидным образом обобщен признак оптимальности допустимого расписания №1, приведенный для задачи 4.1 [4].

Конструирование признака оптимальности №1 допустимого расписания по критерию (1).

п. 1. Рассмотрим следующую монотонно неубывающую последовательность чисел:

$$d_{i_1} - l_{i_1}^{j_1}, d_{i_2} - l_{i_2}^{j_2}, \ldots, d_{i_m} - l_{i_m}^{j_m}, \text{ где}$$

$$d_{i_1} - l_{i_1}^{j_1} = \min_i \{(d_i - \min_j l_i^j), i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m}\} \quad (9)$$

$$d_{i_p} - l_{i_p}^{j_p} = \min_i \{(d_i - \min_j l_i^j), i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m},$$
$$i \notin \{\overline{i_1, i_{p-1}}\}, j \notin \{\overline{j_1, j_{p-1}}\}\}, p = \overline{2, m}$$

При этом на каждом приборе достигается только один минимум. Пусть выполняются все неравенства

$$d_{i_l} + l_{i_p}^{j_l} > d_{i_p} \quad \forall p = \overline{l+1, m}, l = \overline{1, m-1}. \qquad (10)$$

Тогда имеет место утверждение:

Утверждение 8 [4]. Произвольное допустимое расписание, у которого на прибор j_l, $l = \overline{1, m}$, первой назначается работа i_l в момент времени $r_{j_l} = d_{i_l} - l_{i_l}^{j_l}$, является оптимальным расписанием по критерию (1).

Эвристический признак оптимальности №2 по критерию (1): построение начального расписания.

Пусть $\sigma^{\text{уп}}$ – последовательность работ i_1, i_2, …, i_n, определяемая формулами (9) без учета выполнения условия $j \notin \{\overline{j_1, j_{p-1}}\}, p = \overline{2, m}$, и если пар (i_p, j_p) несколько, то выбирается любая. Припишем каждой i_l-й работе j_l-й прибор. Первую работу i_1 назначаем на приписанный к ней прибор j_1 с моментом начала выполнения r_{j_1}. Переходим к следующей работе из $\sigma^{\text{уп}}$ и проверяем, может ли она быть назначена на прибор j_1, и если она не запаздывает, назначаем ее на прибор j_1, и т.д., пока не придем к запаздывающей работе. Запаздывающая работа назначается на приписанный к ней прибор с моментом окончания, равным ее директивному сроку. Назначение следующей работы из $\sigma^{\text{уп}}$ осуществляется, начиная с прибора j_1, в той же последовательности, в которой шло назначение на приборы первых работ. Если ни на один из этих приборов работу назначить без запаздывания не удалось, назначаем эту работу на приписанный к ней прибор с моментом окончания, равным ее директивному сроку. Если на этот прибор уже назначена первая работа, все неназначенные работы из $\sigma^{\text{уп}}$, включая текущую, и все приборы, не содержащие назначенных работ, переупорядочиваются в соответствии с правилами построения $\sigma^{\text{уп}}$. Получаем новую последовательность $\sigma^{\text{уп}}$. Выбираем следующую работу из $\sigma^{\text{уп}}$ и назначаем на приписанный к ней прибор. Дальше эта процедура повторяется до момента назначения первой работы на последний прибор.

Дополнительное условие 1. Моменты запуска всех приборов не меньше, чем $r_{i_1} = d_{i_1} - l_{i_1}^{j_1}$.

Дополнительное условие 2. Начальное расписание удовлетворяет условию: в соответствии с очередностью назначения первых работ, моменты запуска приписанных к ним приборов реализуют числовую неубывающую последовательность.

Примечание. Дополнительное условие 2 включает в себя дополнительное условие 1.

Конструирование признака оптимальности №1 допустимого расписания по критерию (2).

На прибор j_1 назначена работа i_1 с моментом запуска $r_{j_1} = d_{i_1} - l_{i_1}^{j_1}$ и существует допустимое расписание, у которого $r_k \ge r_{j_1}$, $k = \overline{1,m}$.

Для критерия (2) начальное расписание всегда существует, т.к. всегда можно реализовать (9) для нахождения только работы i_1 на приборе j_1.

Эвристический признак оптимальности №2 допустимого расписания по критерию (2).

Совпадает с эвристическим признаком оптимальности №2 для критерия (1) без учета выполнения дополнительного условия 2.

ПДС-алгоритм решения задачи 5.1 [4] по критерию (1) (алгоритм В)

p-составляющая ПДС-алгоритма. Полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма состоит из семи алгоритмов, которые реализуются последовательно в произвольном порядке. Первый алгоритм, построивший допустимое расписание, для которого выполнен признак оптимальности, реализует оптимальное решение задачи по критерию (1).

Алгоритм В1.1

Алгоритм реализует полиномиальную составляющую для построения допустимого расписания, если построено начальное расписание в соответствии с признаком оптимальности №1. В результате исходное множество работ I разбивается на два подмножества: I_1 – множество работ, предварительно назначенных на выполнение, и I_1' – множество еще не назначенных работ, которые упорядочиваются по неубыванию директивных сроков (последовательность $\sigma^{\text{уп}}$; далее под $\sigma^{\text{уп}}$ понимается последовательность работ, упорядоченная по неубыванию директивных сроков). Дальнейшее назначение неназначенных работ на выполнение осуществляется следующим образом: выбираем из последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ очередную работу и назначаем на прибор, на котором опережение относительно ее директивного срока будет максимальным. Аналогичная процедура повторяется для всех работ. Если на очередной итерации алгоритма на всех приборах работа запаздывает, конец алгоритма, алгоритм не реализовал полиномиальную составляющую. В противном случае, назначение продолжается с работы, следующей за назначенной в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$, пока не будут распределены все работы последовательности. Если все работы распределены без запаздывания, полиномиальная составляющая реализована.

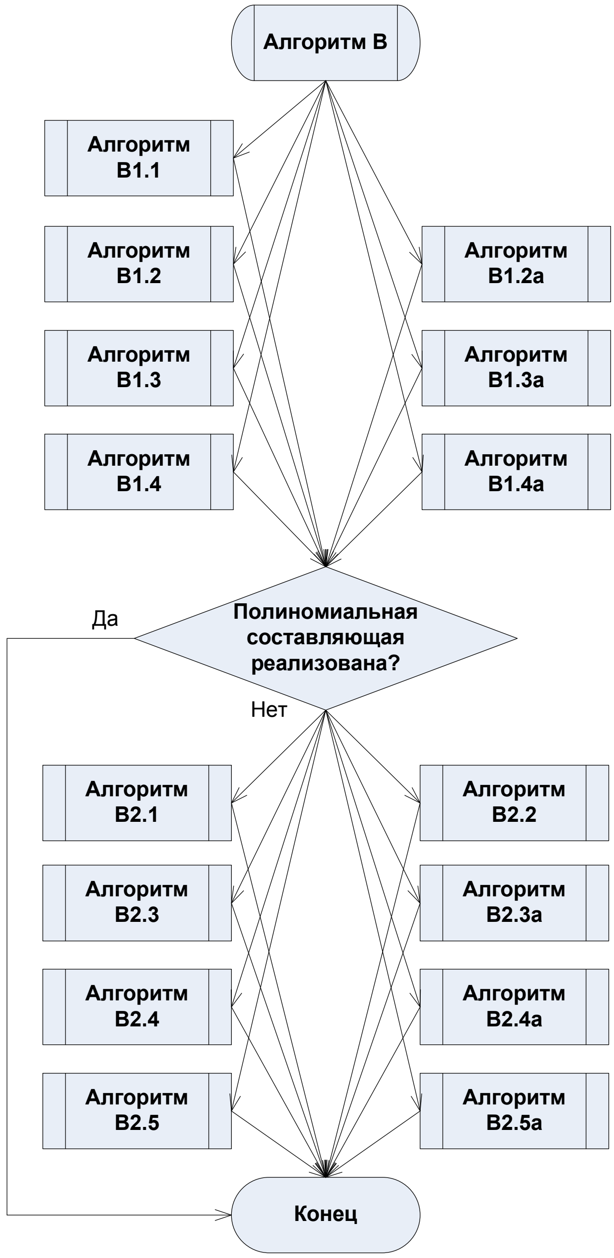

Рис. 3. Схема ПДС-алгоритма В

Алгоритмы В1.2, В1.2а

Алгоритмы В1.2, В1.2а – это алгоритмы А2.1, А2.1а с учетом примечания А (стр. 7), при этом начальное расписание строится в соответствии с признаком оптимальности №1.

Алгоритмы В1.3, В1.3а

Алгоритмы В1.3, В1.3а – это алгоритмы А2.2, А2.2а с учетом примечания А (стр. 7), при этом начальное расписание строится в соответствии с признаком оптимальности №1.

Алгоритмы В1.4, В1.4а

Алгоритмы В1.4, В1.4а – это алгоритмы В2.5, В2.5а (см. ниже) с учетом примечания А (стр. 7), при этом начальное расписание строится в соответствии с признаком оптимальности №1.

Полиномиальная аппроксимация точного алгоритма решения задачи состоит из восьми алгоритмов, задача решается каждым из них и выбирается решение, наилучшее в соответствии с прямым лексикографическим порядком (7).

Алгоритм В2.1

Алгоритм В2.1 – алгоритм полиномиальной сложности для построения допустимого расписания, у которого предварительно работы из множества I (начальное расписание) назначены в соответствии с признаком оптимальности №1 для критерия (1). Алгоритм В2.1 – это алгоритм В1.1 со следующим изменением: если очередная работа из последовательности $\sigma^{уп}$ запаздывает на каждом приборе, то она последовательно ставится на каждый прибор, эта работа и все назначенные ранее на этот прибор работы сдвигаются влево на величину запаздывания назначаемого задания. Получаем m расписаний, которым соответствуют m векторов моментов запуска всех приборов. Выбираем наилучший вектор по прямому лексикографическому порядку (7) и назначаем текущую работу из $\sigma^{уп}$ на прибор, соответствующий наилучшему по (7) вектору начальных моментов запуска приборов. Последним шагом является алгоритм корректировки АК.

Алгоритм В2.2

Алгоритм В2.2 – алгоритм полиномиальной сложности для построения допустимого расписания, у которого предварительно работы из множества I назначены в соответствии с эвристическим признаком оптимальности №2 для критерия (1). Текущая итерация алгоритма В2.2 совпадает с текущей итерацией алгоритма В2.1.

Алгоритмы В2.3, В2.3а

Алгоритмы В2.3, В2.3а – это алгоритмы А2.1, А2.1а для приборов разной производительности.

Алгоритмы А2.1 и А2.1а, их теоретическое обоснование (утверждения 4–6), а также алгоритм корректировки АК, приведенные для параллельных приборов равной производительности, являются универсальными и справедливыми также для приборов разной производительности.

Алгоритмы В2.4, В2.4а

Алгоритмы В2.4, В2.4а – это алгоритмы А2.2, А2.2а для приборов разной производительности.

Алгоритмы А2.2 и А2.2а, их теоретическое обоснование (утверждение 7), а также алгоритм корректировки АК, приведенные для параллельных приборов равной производительности, являются универсальными и справедливыми также для приборов разной производительности.

Алгоритмы В2.5, В2.5а

Алгоритмы В2.5, В2.5а – это адаптация алгоритмов А2.1, А2.1а для приборов разной производительности с тем изменением, что на текущей итерации допустимые работы назначаются в порядке невозрастания длительностей их выполнения на самых выгодных для них допустимых приборах (минимально время выполнения).

Алгоритм В2.5 состоит из ряда однотипных итераций. Каждая итерация, кроме первой, включает предварительный этап и назначение работ на выполнение, которое осуществляется по групповому принципу (группами из m работ – по одной работе на каждый прибор). Назначение работ осуществляется в обратном порядке: на первой итерации алгоритма на каждый прибор назначается по одной работе, момент окончания выполнения которой совпадает с ее директивным сроком, а моменты запуска их на выполнение соответствуют глобальному оптимуму по обратному лексикографическому порядку (для каждой работы находится прибор, момент запуска которого для этой работы является самым поздним; первой назначается работа на прибор с самым поздним моментом запуска, затем следующая работа – на прибор со следующим по величине моментом запуска, и так, пока не будет назначено m работ на m приборов).

Примечание. Множество приборов, из которых находится прибор со следующим по величине моментом запуска, не включает в себя приборы, на которых ранее были назначены работы на первой итерации.

На текущей итерации распределяется множество работ из еще не назначенных на приборы на предыдущих итерациях. На предварительном этапе находятся работы, для каждой из которых существует не менее одного допустимого прибора (работа, назначенная на этот прибор, выполняется без срыва ее директивного срока). Для каждой допустимой работы определяется прибор, на котором ее длительность выполнения является минимальной. Выбирается та допустимая работа, у которой самая короткая длительность выполнения является максимальной, и назначается на прибор, на котором ее длительность выполнения минимальна. Эта работа и прибор исключаются из множества допустимых работ и неназначенных приборов, описанная процедура повторяется вплоть до назначения всех допустимых работ.

В результате такого распределения могут остаться работы, для каждой из которых не существует приборов, на которых они допустимы. Они объединяются во вторую группу работ для текущей итерации. Распределение работ второй группы на приборы осуществляется локально оптимально в соответствии с обратным лексикографическим порядком с учетом сдвига момента запуска работы (и всего расписания работ, уже назначенных на этот прибор предыдущими итерациями) на величину срыва ее директивного срока, пока не будет назначено по одной работе на каждый прибор.

Примечание. Множество приборов, из которых находится прибор со следующим по величине моментом запуска, не включает в себя приборы, на которых ранее были назначены работы на текущей итерации.

Итерации продолжаются до получения моментов начала выполнения первых работ на каждом приборе. Последним шагом является алгоритм корректировки АК.

Алгоритм В2.5а отличается тем, что последним шагом текущей итерации является проверка выполнения неравенства

$$\max_{i=1,m} r_i^{\text{тек}} - \min_{i=1,m} r_i^{\text{тек}} > K_{\text{эксп}}$$

и реализация алгоритма АК, если оно выполняется.

Обоснование эвристики назначения допустимых работ. С учетом того, что на текущей итерации в первую очередь назначается та допустимая работа, у которой самое короткое время выполнения является самым длинным, предполагается, что на последующих итерациях при назначении работ количество запаздывающих работ будет минимальным.

ПДС-алгоритм решения задачи 5.1 [4] по критерию (2) (алгоритм Г)

Критерий (2) описан на стр. 5, признаки оптимальности допустимого решения – на стр. 13.

p-составляющая ПДС-алгоритма. Полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма состоит из семи алгоритмов, которые реализуются последовательно в произвольном порядке. Первый алгоритм, построивший допустимое расписание, для которого выполнен признак оптимальности, реализует оптимальное решение

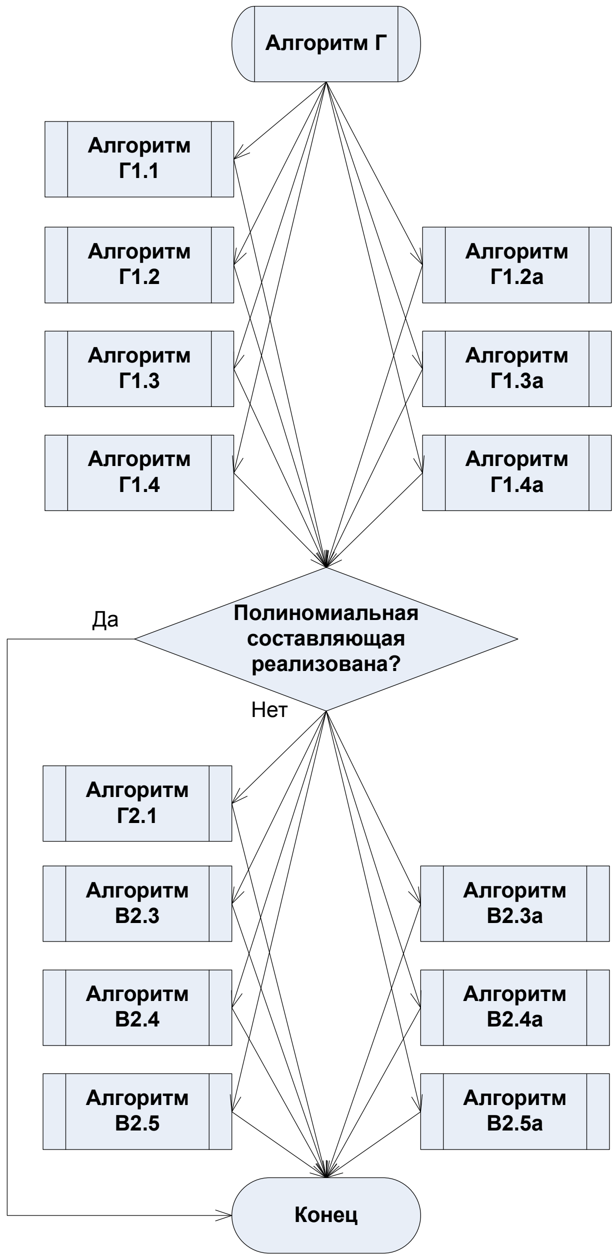

Рис. 4. Схема ПДС-алгоритма Г

Алгоритм Г1.1

Алгоритм реализует полиномиальную составляющую для построения допустимого расписания, если построено начальное расписание в соответствии с эвристическим признаком оптимальности №2 для критерия (2). В результате исходное множество работ I разбивается на два подмножества: I_1 – множество работ, предварительно назначенных на выполнение, и I_1' – множество еще не назначенных работ, которые упорядочиваются по неубыванию директивных сроков (последовательность $\sigma^{уп}$). Дальнейшее назначение работ осуществляется следующим образом. Выбираем очередную работу из последовательности $\sigma^{уп}$ и назначаем на прибор, на котором достигается максимальное опережение относительно ее директивного срока или минимальное запаздывание, если все приборы для нее недопустимы (если этот прибор – j_1-й, то на него назначается только допустимая работа. Если на j_1-м приборе эта работа имеет минимальное запаздывание, то она назначается на следующий прибор с минимальным по величине запаздыванием). Если текущая работа назначается на прибор с минимальным запаздыванием, то расписание ранее назначенных на приборе работ, включая текущую, сдвигается влево на величину запаздывания, и для нового момента запуска проверяется условие: если $r^{нов} \ge r_{j_1}$, назначение работы произведено, если $r^{нов} < r_{j_1}$, полиномиальная составляющая этим алгоритмом не реализована, конец алгоритма. Процедура повторяется со следующей работой из последовательности $\sigma^{уп}$. Если все работы распределены без запаздывания, то получено оптимальное расписание.

Алгоритмы Г1.2, Г1.2а

Алгоритмы Г1.2, Г1.2а – это алгоритмы В2.3, В2.3а с учетом примечания В (см. ниже).

Примечание В. Алгоритм распределяет все работы, кроме i_1. Начальное расписание состоит из одной работы i_1, назначенной на прибор j_1 с моментом запуска r_{j_1}. Для расписания, полученного приближенным алгоритмом, проверяется выполнение следующего условия: момент начала выполнения первой работы приближенного расписания на приборе j_1 должен быть не меньше, чем d_{i_1} (момент окончания выполнения первой работы начального расписания на приборе j_1, назначенной в соответствии с признаком оптимальности), а момент запуска начальных работ приближенного расписания на остальных приборах должен быть не меньше, чем r_{j_1}. Если это условие выполняется, то для получения оптимального расписания необходимо сдвинуть влево расписание работ на приборе j_1, полученное приближенным алгоритмом, так, чтобы момент начала выполнения первой работы приближенного расписания совпадал с моментом окончания выполнения первой работы начального расписания d_{i_1}. Если момент начала выполнения первой работы приближенного расписания на приборе j_1 меньше, чем d_{i_1}, а моменты запуска остальных приборов не меньше, чем r_{j_1}, то первую работу приближенного расписания на приборе j_1 поочередно ставим на остальные приборы и переставляем ее на тот прибор, на котором момент начала выполнения этой работы будет самым большим и не меньше, чем r_{j_1}. Если такой прибор найти не удалось, полиномиальная составляющая не реализована. Если же первая работа перемещена на другой прибор, проверяем условие: если момент запуска второй работы на приборе j_1 больше, чем d_{i_1}, то путем сдвига расписания на приборе j_1 до момента d_{i_1} получаем оптимальное расписание. Если же момент запуска второй работы приближенного расписания на приборе j_1 меньше, чем d_{i_1}, аналогично реализуем перенос второй работы приближенного расписания на приборе j_1. Описанная процедура повторяется, пока либо не получено оптимальное расписание, либо полиномиальная составляющая этим алгоритмом не реализуется.

Алгоритмы Г1.3, Г1.3а

Алгоритмы Г1.3, Г1.3а – это алгоритмы В2.4, В2.4а с учетом примечания В (стр. 16).

Алгоритмы Г1.4, Г1.4а

Алгоритмы Г1.4, Г1.4а – это алгоритмы В2.5, В2.5а с учетом примечания В (стр. 16).

Полиномиальная аппроксимация точного алгоритма решения задачи содержит семь алгоритмов. В качестве приближенных алгоритмов используются алгоритмы В2.3, В2.3а, В2.4, В2.4а, В2.5, В2.5а (см. выше) в силу того, что производится корректировка моментов начала выполнения работ алгоритмом АК (стр. 8), а также алгоритм Г2.1. Задача решается каждым из алгоритмов и выбирается решение, у которого отклонение от r_{j_1} является минимальным.

Алгоритм Г2.1

Алгоритм Г2.1 является модификацией алгоритма Г1.1 (см. выше на стр. 15) со следующим отличием текущей итерации. Если новый момент запуска прибора $r^{нов} < r_{j_1}$, запаздывающая работа ставится на j_1-й прибор и его расписание сдвигается на величину запаздывания текущей работы, после чего она назначается либо на j_1-й прибор, либо на прибор с моментом запуска $r^{нов}$, в зависимости от того, где больше текущий момент запуска. Для дальнейших итераций этот прибор становится аналогом j_1-го прибора. Процедура назначения продолжается аналогично до распределения всех работ. На последнем шаге алгоритма применяем алгоритм корректировки АК.

Оценка отклонения решения от оптимального. Алгоритм полиномиальной аппроксимации является приближенным по критерию (1) или (2), если реализуется начальная часть признака оптимальности (реализуется назначение начального расписания). Тогда существует оценка отклонения решения, полученного приближенным алгоритмом, от оптимального.

По критерию (1): с этой целью производим сравнение векторов по условию (7).

Примечание. Пусть $r_l > r_{q_l}$, где l – номер компоненты, для которой достигается первая положительная разность, т.е. $r_j = r_{q_j}, j = \overline{1, l-1}$. Тогда знаки разностей остальных компонент ($j = \overline{l+1, m}$) могут быть любыми. Лицо, принимающее решение, анализирует полученное решение и выбирает оптимальное или приближенное решение, исходя из практических соображений.

По критерию (2): оценка задается разностью $r_1 - r_{q_1} \geq 0$ (алгоритмы В2.3, В2.3а, В2.4, В2.4а, В2.5, В2.5а, Г2.1 являются приближенными по критерию (2)).

Примечание. Для критерия (1) алгоритмы В2.1, В2.3, В2.3а, В2.4, В2.4а, В2.5, В2.5а являются приближенными, если существует начальное расписание в соответствии с признаком оптимальности №1.

Примечание. Все остальные алгоритмы полиномиальной аппроксимации точных алгоритмов для задачи 5.1 являются эвристическими.

Примечание. Если в конечном расписании, полученном любым алгоритмом полиномиальной аппроксимации точного алгоритма решения задачи, у хотя бы одного из приборов момент запуска отрицательный, то решение задачи данным алгоритмом не получено.

Выводы

На основе разработанных и доказанных ранее признаков оптимальности допустимых решений [4] для задач составления расписаний выполнения независимых работ на параллельных приборах равной (задача 4.1 [4]) и разной (задача 5.1 [4]) производительности по векторному (лексикографическому) критерию (1) и скалярному критерию (2) разработаны ПДС-алгоритмы их решения. Создано 39 алгоритмов, реализующих полиномиальную составляющую ПДС-алгоритма и полиномиальную аппроксимацию точных алгоритмов решения рассматриваемых задач – эвристические или приближенные алгоритмы с оценкой отклонения от оптимального решения. Задача решается по каждому из алгоритмов и выбирается наилучшее из решений.

Список литературы

1. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография.– К.: Наукова думка. – 2010. – 573 с.
2. Конструктивные полиномиальные алгоритмы решения индивидуальных задач из класса NP / А.А.Павлов, А.Б.Литвин, Е.Б.Мисюра, Л.А.Павлова, В.И.Родионов, под редакцией А.А.Павлова.– К.: Техника, 1993.– 126 с.
3. Pavlov A., Pavlova L. PDC-algorithms for intractable combinatorial problems. Theory and methodology of design.– Uzhhorod, «Karpatskij region» shelf №15, 1998.– 320 pp.
4. Павлов А.А. Признаки оптимальности допустимых решений труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации // Вісник НТУУ "КПІ". Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: "ВЕК+", 2013. – №59 – С.4–11.