УДК 621.396.96

КУЦ В.Ю.

СТРУКТУРА ВЫЧИСЛИТЕЛЯ ДЛЯ МНОГОШКАЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

Предложена структура процессора для обработки результатов измерений в многочастотной фазоизмерительной системе с представлением информации в системе остаточных классов. Рассмотрено использование особенностей модулярной арифметики для решения задачи устранения многозначности многошкальных фазовых измерений. Новый поход к получению и обработке численных данных позволяет выполнить контроль правильности устранения многозначности фазовых измерений и за счет этого обеспечить работоспособность таких систем при низких отношениях сигнал/шум.

The processor structure for processing the measurement results in a multi-frequency system fazoizmeritelnoy submitting information in residual classes system is proposed. We consider the use of the features of the modular arithmetic for solving the problem of eliminating ambiguity multiscale phase measurements. New trek to the preparation and processing of numerical data allows you to control the correctness of eliminating ambiguity phase measurements and thereby to ensure the efficiency of such systems at low signal / noise ratio.

Ключевые слова: система остаточных классов, фазовый метод, разрешение многозначности.

1. Введение

Область применения фазового метода измерений как чувствительного и информационно емкого инструмента исследования различных явлений и объектов, постоянно расширяется. Известны примеры его использования для измерения расстояний и плоских углов в астрономии, геодезии, радионавигации, радиотехнике, геологии, метеорологии, физике и т. п. [1, 2].

Фазовый метод измерения, особенного его многочастотный вариант реализации, связан с необходимостью использования значительных вычислительных ресурсов. Одной из наиболее ресурсозатратных задач является устранения многозначности фазовых измерений. Это обусловлено тем, что стремление обеспечить одновременно высокую чувствительность и широкий динамический диапазон требует измерения фазовых сдвигов гармонических сигналов вида $\Phi = 2\pi n + \varphi >> 2\pi$. Здесь n – количество целых фазовых циклов, $\varphi \equiv (\Phi) \bmod 2\pi$ – часть полного фазового сдвига сигналов по модулю 2π, $\equiv$ – обозначение операции сравнения двух чисел по некоторому модулю. Однозначное определение n и составляет суть задачи устранения фазовой многозначности (или неоднозначности).

Известны различные способы решения указанной задачи на основе измерений фазовых сдвигов $\varphi \in [0,\ 2\pi)$ сигналов на нескольких (двух и более) частотах. Например, для фазовых дальномеров на каждой *j*-той рабочей частоте определяется фазовый сдвиг между сигналами вида

$$\begin{aligned} u_{1j}(t) &= U_1 \sin(2\pi f_j t), \quad t \in [0, T], \\ u_{2j}(t, D) &= U_2 \sin[2\pi f_j t - \varphi_j(D)], \end{aligned} \tag{1}$$

при распространении измерительного сигнала вдоль дистанции D (здесь $T > f_j^{-1}$ – время измерения, а $\varphi(D) \equiv \Phi(D) \bmod 2\pi$).

В случае измерения на двух частотах $f_1 < f_2$ для фазового дальномера получают систему уравнений

$$\begin{cases} D = 0,5\lambda_1 (n_1(D) + \varphi_1(D)/2\pi), \\ D = 0,5\lambda_2 (n_2(D) + \varphi_2(D)/2\pi). \end{cases} \tag{2}$$

В уравнениях (2) λ_1, λ_2 – длины волн колебаний с частотами f_1, f_2. Система (2) для однозначного решения дополняется некоторыми начальными условиями. Например, в способе с качанием частоты определяют разность $n_2(D) - n_1(D)$ во время непрерывного изменения частоты сигнала от f_1 до f_2. В способах с использованием фиксированных частот система (2) дополняется условием $n_1(D) = 0$. Расширение динамического диапазона измерений влечет

необходимость увеличения числа рабочих частот и усложнения алгоритмов обработки данных. Это влечет повышение вероятности появления грубых ошибок в определении *n*.

В последнее время получил развитие другой способ устранения многозначности фазовых измерение, основанный на использовании особенностей модулярной арифметики [4]. Этот способ основан на том, что свойство цикличности фазовых сдвигов сигналов, которое аналитически можно представить выражением

$$\varphi(Q) \equiv \Phi(Q) \bmod 2\pi = 2\pi\left(\frac{\Phi(Q)}{2\pi} \bmod 1\right),$$

также присуще и остаткам α_i целого числа A при его представлении по модулю p_j, – $\alpha_j \equiv A \bmod p_j$, то есть в случае представления A в системе остаточных классов (СОК). В этом случае задача устранения многозначности многошкальных фазовых измерений сводится к задаче восстановления целого числа A из его представления остатками в СОК. Известно [3], что СОК относится к помехоустойчивым корректирующим кодам. Это свойство СОК распространяется и на процесс устранения многозначности фазовых измерений.

Известны примеры использования СОК для устранения многозначности в фазовых дальномерах [4], интерферометрах [5], фазовых пеленгаторах [6]. Однако вопросу построения специализированных вычислительных процессоров для таких устройств не уделено должного внимания. Целью статьи является разработка процессора для обработки данных измерений в многочастотных фазоизмерительных системах с представлением информации в СОК.

2. Восстановление целых чисел из их представления остатками в СОК

Модулярная арифметика, в основном, развивалась применительно к использованию в спецпроцессорах с целью повышения быстродействия, надежности и коррекции возможных сбоев во время вычислений. Наиболее важными свойствами СОК являются: 1) отсутствие связей между смежными остатками, 2) возможность организации эффективной системы обнаружения и исправления ошибок во время выполнения арифметических операций и восстановления чисел в позиционной системе счисления из их представления в СОК.

В СОК все целые числа A из некоторого рабочего интервала $A_{\text{р}} - 1$ отображаются множеством неотрицательных остатков α_j от деления A на другие целые числа – модули системы, которые образуют группу взаимнопростых чисел p_j, $j = \overline{1,n}$, то есть $A_{\text{СОК}} = (\alpha_1, ..., \alpha_j, ...\alpha_n)$, где $\alpha_j \in [0,\ p_j)$, $\alpha_j \equiv A \bmod p_j$, $j = \overline{1,n}$.

В отличие от позиционных числовых систем все остатки модульного представления независимы и являются малоразрядными числами. Это позволяет свести основные арифметические операции к параллельному модульному и быстрому выполнению одноименных операций для каждого модуля. Исключение составляют операции деления и сравнения, которые в общем случае выполняются не эффективно.

Для вычислителей фазовых многочастотных систем на основе модулярной арифметики наиболее значимой является операция восстановление целых чисел A из их представления $A_{\text{СОК}}$. Один из способов такого преобразования базируется на китайской теореме об остатках [7]. В соответствие с этой теоремой восстановление A возможно, если, во-первых, модули системы – взаимно простые числа, и во-вторых, максимальное восстанавливаемое число удовлетворяет неравенству

$$A_{\max} < P_{\text{р}} = \prod_{j=1}^{n} p_j .$$

При выполнении этих условий число A однозначно представляется в позиционной системе счисления, то есть существует обратное преобразование $A_{\text{СОК}} \Rightarrow A$. Число A вычисляют по формуле [3]

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j B_j \left(\bmod A_{\text{р}}\right), \qquad (4)$$

где $(B_1, ...B_j, ...B_n)$ – система ортонормированных базисов.

В работе [4] показано, что выбором квантов измерения фазовых сдвигов сигналов $\Delta\varphi_j$ и частот f_j обратно пропорционально модулям системы, задача устранения многозначности фазовых измерений сводится к задаче восстановле-

ния целого числа по его остаткам для максимального значения фазового сдвига $\Phi_{\max} = 2\pi \prod_{j=1}^{n-1} p_j$. При этом остатки вычисляются по фазовым сдвигам сигналов как $a_j = \left[\frac{\varphi_j}{\Delta\varphi_j}\right]^+$, где $[\square]^+$ – операция выделения целой части числа.

Проведение фазовых измерений в условиях реального физического эксперимента сопровождается действием шумов и помех. Последние возникают как в среде распространения сигналов, так и в электронных трактах измерительной аппаратуры. Уменьшение отношения сигнал/шум приводит к увеличению погрешности измерений фазовых сдвигов сигналов и, как следствие, к росту вероятности ошибок вычисления остатков.

Если основу СОК дополнить еще одним модулем $p_{n+1} > p_j$, $j = \overline{1,n}$ (или $k \geq 1$ модулями), образуется новая СОК, называемая полной, с иной системой ортонормированных базисов $(\tilde{B}_1, ... \tilde{B}_j, ... \tilde{B}_{n+1})$ и полным диапазоном представления чисел $[0,\ A_п)$, где $A_п = \prod_{j=1}^{n+1} p_j$. Любое искажение остатка в представлении $(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$, например, первого – $\tilde{\alpha}_1$, приводит к тому, что число $\tilde{A} = \left(\tilde{\alpha}_1 B_1 + \sum_{i=2}^{n+1} a_i B_i\right)(\mathrm{mod}\, A_п)$ при его вычислении переходит из рабочего в запрещенный диапазон $[A_р,\ A_р p_{n+1})$. Такой результат является признаком ошибки и используется для ее поиска и устранения.

3. Организация процесса поиска остатков с ошибками в представлении числа $A_{СОК}$

Использование СОК для представления результатов многошкальных фазовых измерений позволяет увеличить вероятность правильного решения задачи устранения многозначности путем проведения измерений на одной или нескольких дополнительных шкалах, обнаружения остатков с ошибками и их удаления или исправления.

Наиболее простой способ поиска и коррекции искаженного остатка заключается в восстановлении числа A по его проекциям в СОК по разным подсистемам модулей [3] и последующему анализу полученных результатов восстановления числа в позиционной системе счисления. Новые подсистемы модулей получают из иссходной системы $(p_1, ..., p_j, ... p_{n+k})$ путем удасения произвольных k модулей. Количество таких подсистем равно количеству сочетаний $C_{n+k}^n = \frac{(n+k)!}{n!k!}$. Для $k = 1$ число таких систем $C_{n+1}^n = n+1$. Для каждой новой *g-той* подсистемы, $g \in \left[1,\ C_{n+k}^n\right]$, рассчитывается свой базис $Bg = (\tilde{B}g_1, ... \tilde{B}g_j, ... \tilde{B}g_n)$, определяется число

$$Ag = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{B}g_j\right)(\mathrm{mod}\, A_п) \qquad (5)$$

и проверяется выполнение условия $Ag \in [0,\ A_р)$ Это позволяет выявить искаженные ошибками остатки и исключить их при восстановлении числа *A*.

Такое свойство СОК объясняется тем, что ошибка в одной позиции вектора $A_{СОК}$ не влияет на расчеты в других позициях вектора. В отличие от позиционной системы счисления все элементы $A_{СОК}$ равнозначны и ошибка в одном из них ведет всего лишь к сокращению динамического диапазона. Этот факт собственно и позволяет проектировать устройства с коррекцией ошибок.

4. Моделирование процесса вычисления целого числа из его представления в СОК

Рассмотрим численные примеры, иллюстрирующие процесс восстановления числа и обнаружения остатков с ошибками.

В этих примерах вычисление базисов СОК для системы модулей произвольной размерности осуществлчлось с помощью созданной в среде Matlab файл-функции sokbaz.m:

```
function B=sokbaz(P)%P-вектор модулей
N=length(P);
PP=prod(P);
for l=1:N
   p=P(l);
   d=mod(PP/p,p);
   m=1;
   while mod(m*d,p)~=1
      m=m+1;
   end
```

```
   B(l)=m*PP/p;% базис
end
y=mod(sum(B),PP);
if y~=1
   B(1:N)=NaN;
   sprintf('%s','ОШИБКА!!!')
end
```

Пример 1. Зададим систему модулей (13, 14, 15, 17), для которой рабочий диапазон составляет $A_р = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$, а полный – $A_п = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 17 = 46410$, то есть n=3, k=1.

Рассмотрим представление числа $A = 2014$ в заданной системе модулей:

$$A_{СОК} = (12,\ 12,\ 4,\ 8).$$

Расчет базисов СОК дает результат:

$$B = (17850,\ 29835,\ 12376,\ 32760).$$

Вычисление позиционного числа A в соответствие с (5) дает значение

$$A = \sum_{j=1}^{4} a_j B_j \left(\bmod A_п\right) = \left(12 \cdot 17850 + 12 \cdot 29835 + \right.$$

$$\left. + 4 \cdot 12376 + 8 \cdot 32760\right) \bmod 46410 = 2014.$$

Таким образом, восстановление числа выполнено без ошибок.

Приведенная в примере 1 система модулей позволяет выявлять все одиночные ошибки в представлении $A_{СОК}$ в интервале $\left[0,\ A_р\right)$. Перейдем к рассмотрению этого корректирующего свойства СОК.

Пример 2. Изменим условия примера 1. Пусть в представлении $A_{СОК}$ числа $A = 2014$ искажен один, второй, разряд, например,

$$\tilde{A}_{СОК} = (12,\ 13,\ 4,\ 8).$$

Тогда процедура восстановления позиционного числа дает следующий результат

$$A = \sum_{j=1}^{4} a_j B_j \left(\bmod A_п\right) = \left(12 \cdot 17850 + 13 \cdot 29835 + \right.$$

$$\left. + 4 \cdot 12376 + 8 \cdot 32760\right) \bmod 46410 = 31849 > A_р.$$

Полученное неравенство свидетельствует о присутствии в $A_{СОК}$ остатка с ошибкой. Проверим корректность применения способа проекций для поиска искаженных ошибками остатков.

Пример 3. Выполним корректное восстановление искомого позиционного числа по его проекциям для данных примера 2. Количество таких проекций определяется числом сочетаний всех модулей по три: $C_4^3 = 4$. Выполним расчеты для четырех возможных подсистем модулей

А) для подсистемы модулей (14, 15, 17) имеем: $\tilde{A}1_{СОК} = (13,\ 4,\ 8)$,

$$B1 = (1275,\ 1666,\ 630),$$

а вычисленное по формуле (5) число –

$$\tilde{A}1 = (13 \cdot 1275 + 4 \cdot 1666 + 8 \cdot 630) \bmod 46410 =$$

$$= 28279 > A_р.$$

Б) для подсистемы модулей (13, 15, 17) –

$$\tilde{A}2_{СОК} = (12,\ 4,\ 8),$$

$$B2 = (1275,\ 2431,\ 2925),$$

$$\tilde{A}2 = 2014 = A < A_р\,!$$

В) для подсистемы модулей (13, 14, 17) –

$$\tilde{A}3_{СОК} = (12,\ 13,\ 8)$$

$$B3 = (2380,\ 1989,\ 1820)$$

$$\tilde{A}3 = 22567 > A_р$$

Г) для подсистемы модулей (13, 14, 15) –

$$\tilde{A}4_{СОК} = (12,\ 13,\ 4)$$

$$B4 = (1470,\ 2535,\ 1456)$$

$$\tilde{A}4 = 10009 > A_р.$$

Вывод: корректное знеачение восстановленного числа получено для подсистемы модулей (13, 15, 17). Єтот результат свидетельствует о том, что остаток $\tilde{a}_2 = 13$ по модулю $p_2 = 14$ получен с ошибкой.

Таким образом, вычисление искомого позиционного числа по различным подсистемам модулей с последующей проверкой выполнения неравенства $\tilde{A}j < A_р$ позволяет выявлять в представлении $A_{СОК}$ остаток с ошибкой и исключать его из процесса получения коректного результата.

5. Структура процессора для многошкальной фазовой системы с использованием модулярной арифметики

Выполненный выше анализ особенностей применения модулярной арифметики для обработки результатов многошкальных фазовых измерений позволил предложить специализированный процессор для реализации таких вычислений. Структура такого процессора приведена на рис.1.

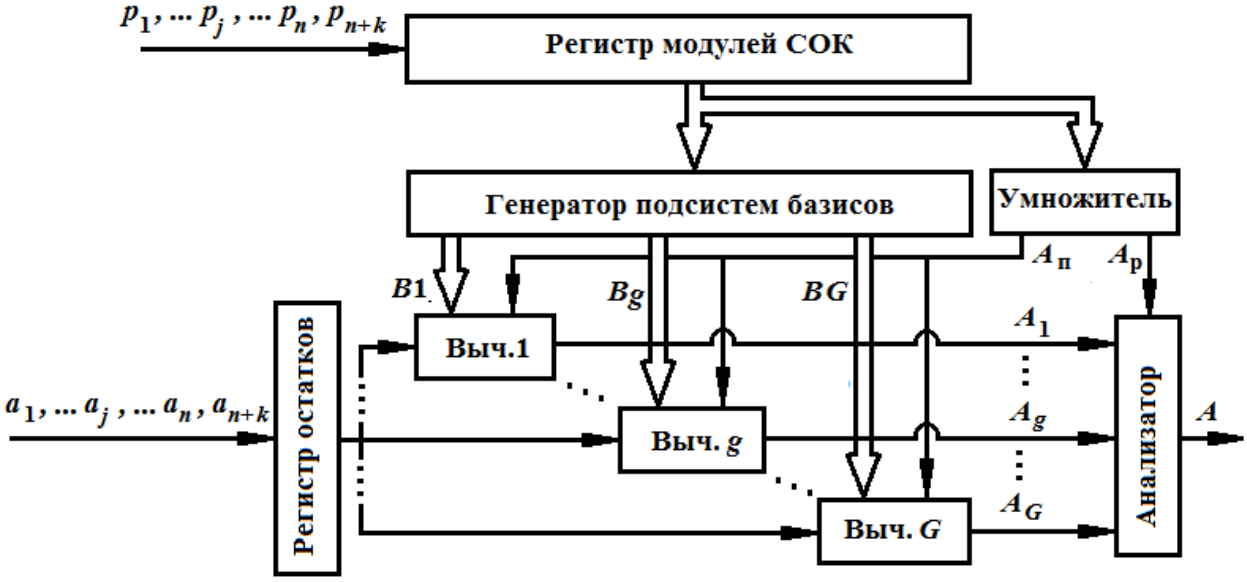

Рис. 1. Структура специализированного процессора для многошкальной фазовой измерительной системы с использованием модулярной арифметики.

Процессор работает следующим образом. Модули СОК $(p_1,...p_{n+k})$ и полученные остатки восстанавливаемого числа $(a_1,...a_{n+k})$ хранятся в соответствующих регистрах. Генератор подсистем базисов вычисляет значения последних для всех $g=\overline{1,G}$ возможных сочетаний базисов для рабочего диапазона СОК. Умножитель формирует границы рабочего $A_р$ и полного $A_п$ диапазонов представления чисел в позиционной системе счисления. Вычислители Выч.g, $g=\overline{1,G}$, реализуют вычисление чисел в соответствие с алгоритмом (5). Анализатор выполняет проверку неравенства $A<A_р$ и формирование корректного результата восстановления числа.

Ошибка в одной позиции вектора не влияет на расчеты в других позициях вектора. В отличие от позиционной системы счисления все элементы вектора равнозначны и ошибка в одном из них ведет всего лишь к сокращению динамического диапазона. Этот факт позволяет проектировать устройства с повышенной отказоустойчивостью и коррекцией ошибок

По данным [3] введение только одного дополнительного модуля позволяет выявлять все одиночне ошибки (ошибки в одном остатке) и ~95% двойных ошибок.

Заключение

Фазовый многшкальный метод имерения различных физических величин обеспечивает высокую точность и разрешающую способность измерения.

Задача устранения многозначности многошкальных фазовых измерениях сводится к задаче восстановления целых чисел из их представления в СОК по заданной системе модулей соответствующим выбором значений частот и ступеней квантов ания фазовых сдвигов сигналов.

Одним из наиболее важних свойств арифметики СОК является возможность наращивания числа модулей системы, что позволяет реализовать помехоустойчивый способ обработки результатов многошкальный фазових измерений для большого числа шкал и пониженного отношения сигнал/шум.

Использование многошкального фазового метода в сочетании с возможностями арифметики СОК позволяет существенно расширить функциональные возможности метода за счет выполнения фазовых измерений на дополнительных частотах и реализации способов обнаружения и исправления ошибок определения фазовых сдвигов сигналов, значительно превышающих величину 2π.

Предложенный процессор для обработки результатов многошкальных фазовых измерений с использованием модулярной арифметики. Введение только одной дополнительной шкалы за счет фазовых измерений на одной дополнитель-

ной частоте позволяет процессору выявить все одиночне ошибки и ~95% двойных ошибок при решении задачи устранения фазовой неоднозначности измерений. Это способствует уменьшению вероятности грубых погрешностей в условиях работы фазоизмерительной аппаратуры при низких соотношениях сигнал/шум. Развитие этого направления требует дальнейших исследований в части анализа эффективности выявления и корректирования боле сложных ошибок.

Список литературы

1. В.Б. Пестряков. Фазовые радиотехнические системы (основы статистической теории). М.: Советское радио, 1968, 468 с.
2. Ю.В. Куц, Л.Н. Щербак**.** Статистична фазометрія. Тернопіль: Тернопільський державний університет ім. І. Пулюя, 2009, 383 с.
3. И.Я. Акушский, Д.И. Юдицкий. Машинная арифметика в остаточных классах, М.: Советское радио, 1968, 440 с.
4. Ю.В Куц Вимірювання кумулятивних фазових зсувів. Технічна електродинаміка, 2001, №5, С.67-72.
5. В.И. Гужов, С.П. Ильиных. Компьютерная интерферометрия. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004, 252 с.
6. В.Ю. Куц. Представлення і оброблювання даних вимірювань в системі залишкових класів. Матеріали V міжнар. наук.-практ. конф.«Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем», 19-22 травня 2015 р.– Чернігів, 2015.–С.253.
7. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов, т.2, с.862. М.: Советская Энциклопедия, 1979, 1104 с.